Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ορισμός του συνόλου

Σύνολο λέγεται κάθε συλλογή πραγματικών ή φανταστικών αντικειμένων , που είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
Τα παραπάνω αντικείμενα λέγονται **στοιχεία** του συνόλου

2.
Τα σύνολα αριθμών

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των Φυσικών : $\mathbb{N} = \{0,\ 1, 2, \ldots\}$

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των Ακεραίων : $\mathbb{Z} = \{\ \ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ \}$

Να σημειώσουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι και ακέραιοι.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των Ρητών : $\mathbb{Q}$ = το σύνολο των κλασμάτων με αριθμητή ακέραιο και παρανομαστή ακέραιο $\neq 0$

Να σημειώσουμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί είναι και ρητοί. $\left(4 = \frac{4}{1}\right)$

Το σύνολο των Άρρητων : το σύνολο των αριθμών που δεν είναι ρητοί ($\sqrt{2}$)

Να σημειώσουμε ότι οι άρρητοι αριθμοί είναι δεκαδικοί μη περιοδικοί με άπειρο πλήθος ψηφίων.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών : $\mathbb{R}$ = το σύνολο των ρητών και άρρητων μαζί.

3.
Παράσταση συνόλου

α) Με αναγραφή των στοιχείων του

Π.χ $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$

β) Με περιγραφή των στοιχείων του

Π.χ $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 0\}$

4.

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα A, B λέγονται ίσα όταν έχουν τα ίδια στοιχεία.

5.

Υποσύνολο συνόλου

Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B όταν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο και του B. (Συμβολίζουμε $A \subseteq B$).

Ιδιότητες : **i)** $A \subseteq A$
ii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$
iii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

6.

Το κενό σύνολο

Δεχόμαστε ότι υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία , που λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται $\varnothing$.

7.

Πράξεις μεταξύ συνόλων

Έστω A , B δύο υποσύνολα συνόλου Ω.

i) Ένωση $A \cup B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \ \text{ ή } \ x \in B\}$

ii) Τομή $A \cap B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \ \text{ και } \ x \in B\}$

iii) Συμπλήρωμα $A' = \{x \in \Omega \ / \ x \notin A\}$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Στην παράσταση συνόλου με περιγραφή

α) Το σύμβολο « / » διαβάζεται « όπου » και λειτουργεί επεξηγηματικά.
β) Χρειαζόμαστε ένα ευρύτερο σύνολο, μια μεταβλητή x που διατρέχει το ευρύτερο σύνολο, και μια ιδιότητα.

Π.χ $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \geq 0\}$

Το $\mathbb{Z}$ είναι το ευρύτερο σύνολο , x είναι η μεταβλητή και $x \geq 0$ είναι η ιδιότητα .

2.

Για να αποδείξουμε ότι $A \subseteq B$

Θεωρούμε τυχαίο στοιχείο $x \in A$ και αποδεικνύουμε ότι $x \in B$.

3.

Για να αποδείξουμε ότι $A = B$

Αποδεικνύουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

4.

Τα στοιχεία του συνόλου $A \cup B$ είναι τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A, B

* Ισχύει η ισοδυναμία : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ή $x \in B$

5.

Τα στοιχεία του συνόλου $A \cap B$ είναι τα κοινά στοιχεία των A, B

* Ισχύει η ισοδυναμία : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ και $x \in B$

6.

Τα στοιχεία του συνόλου A' είναι τα στοιχεία του βασικού συνόλου Ω που δεν ανήκουν στο A

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Απαντήστε αν , οι ηλικιωμένοι καθηγητές του Λυκείου σας αποτελούν σύνολο κατά τα μαθηματικά και γιατί.

Ορισμός του συνόλου

Απάντηση

Δεν αποτελούν σύνολο , αφού η λέξη «ηλικιωμένος » δεν είναι καλά ορισμένη

2.

Απαντήστε αν , όλα τα τρίγωνα αποτελούν σύνολο κατά τα μαθηματικά και γιατί.

Ορισμός του συνόλου

Απάντηση

Αποτελούν σύνολο , αφού η λέξη « τρίγωνο » είναι καλά ορισμένη και τα τρίγωνα διακρίνονται το ένα από το άλλο.

3.

Να γραφούν τρεις αριθμοί οι οποίοι να ανήκουν

i) στο σύνολο $\mathbb{N}$

ii) στο σύνολο $\mathbb{Z}$ και όχι στο σύνολο $\mathbb{N}$

iii) στο σύνολο $\mathbb{Q}$

iv) στο σύνολο $\mathbb{Q}$ και όχι στο σύνολο $\mathbb{Z}$

iv) στο σύνολο $\mathbb{R}$ και όχι στο σύνολο $\mathbb{Q}$

Απάντηση

Βλέπε ΘΕΩΡΙΑ 1

4.

Να απαντήσετε σε ποια σύνολα αριθμών ανήκουν οι αριθμοί -2 , $\frac{5}{3}$, 8 , $\sqrt{2}$

Απάντηση

Ο -2 ανήκει στα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Ο $\frac{5}{3}$ ανήκει στα σύνολα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Ο 8 ανήκει στα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Ο $\sqrt{2}$ ανήκει στο σύνολο $\mathbb{R}$

5.

Τα διαστήματα $(1,\ 4)$, $(1,\ 4]$, $[1,\ 4]$, $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$ να παρασταθούν με περιγραφή των στοιχείων τους.

Λύση

$(1,\ 4) = \{\, x \in \mathbb{R} \ /\ 1 < x < 4 \,\}$

$(1,\ 4] = \{\, x \in \mathbb{R} \ /\ 1 < x \le 4 \,\}$

$[1,\ 4] = \{\, x \in \mathbb{R} \ /\ 1 \le x \le 4 \,\}$

Σχόλιο 1

$(-\infty,\ 1) = \{\, x \in \mathbb{R} \ /\ x < 1 \,\}$

$(1,\ +\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \ /\ x > 1 \,\}$

6.

Έστω A το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 1 = 0$ και B το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $x^4 - 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι $A \subseteq B$.

Λύση

Έστω $\rho \in A$ τυχαίο, δηλαδή ρ τυχαία ρίζα της εξίσωσης

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \rho^2 - 1 = 0$

Σχόλιο 2

$\rho^2 = 1$

$\rho^4 = 1$

$\rho^4 - 1 = 0 \Rightarrow$ το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 1 = 0$, δηλαδή $\rho \in B$

Άρα $A \subseteq B$

7.

Έστω A το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $2x - 6 > 0$ και B το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $x + 1 > \frac{x+3}{2}$. Να αποδείξετε ότι $A \subseteq B$

Λύση

$2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$

Σχόλιο 2

$x + 1 > \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2x + 2 > x + 3 \Leftrightarrow x > 1$

Έστω $\rho \in A$ τυχαίο, δηλαδή τυχαία λύση της ανίσωσης

$2x - 6 > 0 \Rightarrow \rho > 3 \Rightarrow \rho > 1$

$\Rightarrow$ το ρ είναι λύση της ανίσωσης $x + 1 > \frac{x+3}{2}$

δηλαδή $\rho \in B$

8.

Αν τα A, B είναι υποσύνολα βασικού συνόλου Ω και $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $A \cup B = B$.

Λύση

Έστω τυχαίο $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ή $x \in B$ **(1)**

Επειδή όμως $A \subseteq B$, από την $x \in A \Rightarrow x \in B$

Η (1) γίνεται $x \in B$ ή $x \in B \Rightarrow x \in B$

Άρα $A \cup B \subseteq B$ **(2)**

Έστω τυχαίο $x \in B \Rightarrow x \in A$ ή $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

Άρα $B \subseteq A \cup B$ **(3)**

Σχόλιο 2 και 3

Από τις (2), (3) $\Rightarrow A \cup B = B$

9.

Αν τα A, B είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω και $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $A \cap B = A$

Λύση

Έστω τυχαίο $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ και $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$

Άρα $A \cap B \subseteq A$ **(1)**

Σχόλιο 2 και 3

Έστω τυχαίο $x \in A$

Επειδή όμως $A \subseteq B$ θα έχουμε και $x \in B$

Επομένως $x \in A$ και $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow A \cap B = A$

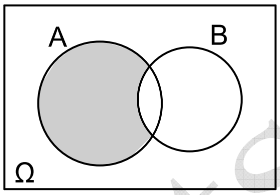
10.

Αν τα A, B είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω με $A \cap B \neq \varnothing$, σε διάγραμμα Venn να γραμμοσκιάσετε τα σύνολα **i)** $A \cap B'$

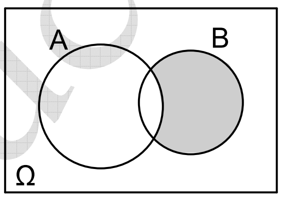
ii) $B \cap A'$

iii) $(A \cap B') \cup (B \cap A')$

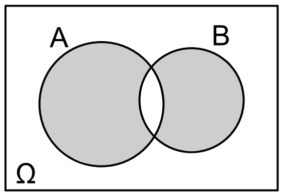
Απάντηση



$A \cap B'$



$B \cap A'$



$(A \cap B') \cup (B \cap A')$