5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το το σύνολο $\mathbb{N}^* = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \ldots\}$ και σύνολο αφίξεως το $\mathbb{R}$
Η ακολουθία συμβολίζεται (α_ν) ή (β_ν) κ.λ.π

2.

Όροι της ακολουθίας

Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχίζεται το 1 ονομάζεται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και συμβολίζεται συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχίζεται το 2 ονομάζεται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha_2}$ κ. λ .π

3.

ν- στός όρος ή γενικός όρος

Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχίζεται ο φυσικός αριθμός **ν** ονομάζεται
ν- στός όρος ή γενικός όρος της ακολουθίας και συμβολίζεται συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_\nu}$
Το $\boldsymbol{\alpha_\nu}$ είναι ένας μαθηματικός τύπος με μεταβλητή τον φυσικό αριθμό ν
Η ακολουθία συμβολίζεται (α_ν)

4.

Αναδρομικός τύπος

Είναι ο τύπος που συσχετίζει δύο ή περισσότερους γενικούς όρους μιας ακολουθίας

5.

Ακολουθία ορισμένη

Μία ακολουθία είναι ορισμένη όταν γνωρίζουμε τους όρους της ή μπορούμε να τους βρούμε.
Η εύρεσή τους γίνεται μέσα από αναδρομικό τύπο.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Προσδιορισμός όρων μιας ακολουθίας

Όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο $\boldsymbol{\alpha_\nu}$, για να βρούμε κάποιον όρο της ακολουθίας π.χ τον 5^{o} , βάζουμε στον τύπο του $\boldsymbol{\alpha_\nu}$ όπου ν το 5 και κάνουμε πράξεις.
Αν η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά τότε χρησιμοποιούμε όλες τις πληροφορίες που έχουμε για να μπορέσουμε να βρούμε τον ζητούμενο όρο.

2.
Μειονέκτημα

Όταν μία ακολουθία ορίζεται αναδρομικά και θέλουμε να βρούμε κάποιον όρο της , π.χ τον α_5 , είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε όλους τους προηγούμενους όρους και μετά τον ζητούμενο , πράγμα που είναι χρονοβόρο

3.
Κάτι που εξυπηρετεί

Αν μία ακολουθία ορίζεται αναδρομικά , τότε μπορούμε , κάποιες φορές ,να προσδιορίσουμε τον τύπο του ν-οστού όρου και στην συνέχεια μέσω αυτού να βρούμε όποιον όρο της ακολουθίας θέλουμε .
Οι ποιο συνηθισμένες περιπτώσεις είναι εκείνες στις οποίες η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά όπως παρακάτω
$\alpha_1 = \alpha$ και $\alpha_{\nu+1} = \gamma\,\alpha_\nu + \beta$ ή $\alpha_1 = \alpha$ και $\alpha_{\nu+1} = \beta\,\alpha_\nu$
όπου α , γ και β γνωστοί αριθμοί

4.
Από τον ν- στο όρο σε αναδρομικό ορισμό

Κάποιες φορές αν είναι γνωστός ο ν-στός όρος , μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία και αναδρομικά .
Οι ποιο συνηθισμένες περιπτώσεις είναι εκείνες στις οποίες ο ν-στός όρος είναι της μορφής $\alpha_\nu = \alpha \cdot \nu + \beta$ ή $\alpha_\nu = \beta \cdot \alpha^\nu$, όπου α και β γνωστοί αριθμοί

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους των ακολουθιών

i) $\alpha_\nu = (-1)^\nu + 1$ **ii)** $\alpha_\nu = \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4}$ **iii)** $\alpha_\nu = 2\nu^2+1$

iv) $\alpha_\nu = |\nu - 4|$ **v)** $\alpha_\nu = \frac{\nu-2}{\nu+1}$ **vi)** $\alpha_\nu = 2\eta\mu\frac{\nu\pi}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha_1 = (-1)^1 + 1 = -1 + 1 = 0$ $\alpha_2 = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$\alpha_3 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$ $\alpha_4 = (-1)^4 + 1 = 1 + 1 = 2$

ii)

$\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Σχόλιο 1 $\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$

$\alpha_3 = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\alpha_4 = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\,\pi = -1$

iii)

$\alpha_1 = 2\cdot1^2+1 = 2 + 1 = 3$ $\alpha_2 = 2\cdot2^2 + 1 = 8 + 1 = 9$

$\alpha_3 = 2\cdot3^2+1 = 18 + 1 = 19$ $\alpha_4 = 2\cdot4^2 + 1 = 32 + 1 = 33$

iv)

$\alpha_1 = |1 - 4| = |-3| = 3$ $\alpha_2 = |2 - 4| = |-2| = 2$

$\alpha_3 = |3 - 4| = |-1| = 1$ $\alpha_4 = |4 - 4| = |0| = 0$

v)

$\alpha_1 = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$ $\alpha_2 = \frac{2-2}{2+1} = 0$

$\alpha_3 = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$ $\alpha_4 = \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}$

vi)

$\alpha_1 = 2\eta\mu\frac{\pi}{2} = 2\cdot1 = 2$ $\alpha_2 = 2\eta\mu\frac{2\pi}{2} = 2\eta\mu\pi = 2\cdot0 = 0$

$\alpha_3 = 2\eta\mu\frac{3\pi}{2} = 2\cdot(-1) = -2$ $\alpha_4 = 2\eta\mu\frac{4\pi}{2} = 2\eta\mu2\pi = 2\cdot0 = 0$

2.

Να βρείτε τους $3^{ους}$ όρους των ακολουθιών

i) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{2\alpha_\nu - 1}{3}$ **ii)** $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu - 3$

iii) $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{\alpha_\nu^2}$ **iv)** $\alpha_1 = -1$ και $\alpha_{\nu+1} = -1 - 2\alpha_\nu$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

i)

Ο αναδρομικός τύπος για $\nu = 1$ δίνει $\alpha_2 = \dfrac{2\alpha_1 - 1}{3} = \dfrac{2\cdot 2 - 1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

για $\nu = 2$ δίνει $\alpha_3 = \dfrac{2\alpha_2 - 1}{3} = \dfrac{2\cdot 1 - 1}{3} = \dfrac{1}{3}$

ii)

Για $\nu = 1$ έχουμε $\alpha_2 = 2\alpha_1 - 3 = 2\cdot 0 - 3 = -3$

Για $\nu = 2$ έχουμε $\alpha_3 = 2\alpha_2 - 3 = 2\cdot(-3) - 3 = -9$

iii)

Για $\nu = 1$ έχουμε $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1$

Για $\nu = 2$ έχουμε $\alpha_3 = \dfrac{1}{\alpha_2^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1$

iv)

Για $\nu = 1$ έχουμε $\alpha_2 = -1 - 2\alpha_1 = -1 - 2(-1) = -1 + 2 = 1$

Για $\nu = 2$ έχουμε $\alpha_3 = -1 - 2\alpha_2 = -1 - 2\cdot 1 = -1 - 2 = -3$

3.

Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες

i) $\alpha_\nu = 2\nu - 4$ **ii)** $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu \cdot 2^{\nu+1}}{4}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Για $\nu = 1$ έχουμε $\alpha_1 = 2\cdot 1 - 4 = -2$

Είναι $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2(\nu+1) - 4 - (2\nu - 4) = 2\nu + 2 - 4 - 2\nu + 4 = 2$

Αποδείχθηκε ότι $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = 2 + \alpha_\nu$

Οπότε αναδρομικά η ακολουθία γράφεται : $\alpha_1 = -2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2 + \alpha_\nu$

ii)

Για $\nu = 1$ έχουμε $\alpha_1 = \dfrac{3^1 \cdot 2^{1+1}}{4} = \dfrac{3\cdot 2^2}{4} = 3$

$$\text{Είναι} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\dfrac{3^{\nu+1}\cdot 2^{\nu+2}}{4}}{\dfrac{3^\nu \cdot 2^{\nu+1}}{4}} = \frac{3^\nu \cdot 3 \cdot 2^\nu \cdot 2^2}{3^\nu \cdot 2 \cdot 2^\nu} = 6$$

Αποδείχθηκε ότι $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 6 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = 6\alpha_\nu$

Οπότε αναδρομικά η ακολουθία γράφεται : $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 6\alpha_\nu$

4.

i) Να βρείτε τον ν-στό όρο των παρακάτω ακολουθιών

α) $\alpha_1 = -4$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$ **β)** $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ και $\alpha_{\nu+1} = -2\alpha_\nu$

ii) Της πρώτης ακολουθίας να βρείτε τον όρο $\nu + 2$ τάξης και της δεύτερης τον όρο κ τάξης

Προτεινόμενη λύση

i)

α) Είναι $\alpha_1 = \alpha_1$ και με βάση τον αναδρομικό τύπο έχουμε

$\alpha_2 = \alpha_1 - 3$
$\alpha_3 = \alpha_2 - 3$
$\alpha_4 = \alpha_3 - 3$
………..
………..
$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} - 3$
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} - 3$ (το πλήθος των ισοτήτων είναι $\nu - 1$)

Προσθέτοντας κατά μέλη όλες τις ισότητες και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα τριάρια στο 2^o μέλος εμφανίζονται $\nu - 1$ φορές , έχουμε ότι $\alpha_\nu = \alpha_1 - 3(\nu - 1) =$
$= -4 - 3\nu + 3 =$
$= -3\nu - 1$

β) Είναι $\alpha_1 = \alpha_1$ και με βάση τον αναδρομικό τύπο έχουμε

$\alpha_2 = -2\alpha_1$
$\alpha_3 = -2\alpha_2$
$\alpha_4 = -2\alpha_3$
………..
………..
$\alpha_{\nu-1} = -2\alpha_{\nu-2}$
$\alpha_\nu = -2\alpha_{\nu-1}$ (το πλήθος των ισοτήτων είναι $\nu - 1$)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη όλες τις ισότητες και λαμβάνοντας υπόψη ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\neq 0$, καθώς επίσης ότι το -2 στο 2^o μέλος εμφανίζεται $\nu - 1$ φορές , έχουμε ότι $\alpha_\nu = (-2)^{\nu-1} \cdot \alpha_1 =$
$= (-2)^{\nu-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$
$= (-2)^{\nu-1} \cdot (-2)^{-1} = (-2)^{\nu-2}$

ii)

$\alpha_{\nu+2} = -3(\nu+2) - 1 = -3\nu - 6 - 1 = -3\nu - 7$
$\alpha_\kappa = (-2)^{\kappa-2}$

5.

Ο γενικός όρος της ακολουθίας $α_ν = |5ν – 1| – |5ν + 1|$ είναι

Α. $α_ν = 5ν + 2$ Β. $α_ν = 10ν$ Γ. $α_ν = 10ν – 2$ Δ. $α_ν = – 2$ Ε. $α_ν = 2$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

Επειδή το ν είναι φυσικός αριθμός με $ν \geq 1$, είναι $5ν – 1 > 0$ και $5ν + 1 > 0$

Άρα $|5ν – 1| = 5ν – 1$ και $|5ν + 1| = 5ν + 1$

Οπότε $α_ν = 5ν – 1 – (5ν + 1) = 5ν – 1 – 5ν – 1 = – 2$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η Δ

6.

Για την ακολουθία $(α_ν)$ με $α_ν = \dfrac{15}{ν}$ είναι

Α. $α_{ν+1} = α_ν$ Β. $α_ν > α_{ν+1}$ Γ. $α_ν < α_{ν+1}$ Δ. $α_{ν+1} = 15\,α_ν$ Ε. $α_ν = 15\,α_{ν+1}$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

Είναι $α_{ν+1} = \dfrac{15}{ν+1}$ και προφανώς $\dfrac{15}{ν+1} < \dfrac{15}{ν}$ για κάθε $ν \in \mathbb{N}^*$

Άρα $α_{ν+1} < α_ν$

Συνεπώς σωστή απάντηση είναι η Β

7.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τους όρους που λείπουν στις ακολουθίες που ορίζονται στην πρώτη στήλη

Ακολουθία	$α_1$	$α_2$	$α_3$	$α_4$	$α_5$
$α_{ν+1} = α_ν + 2$	…	…	3	…	…
$α_{ν+1} = 2α_ν + 1$	…	…	…	– 13	…

Προτεινόμενη λύση

Ο τύπος $α_{ν+1} = α_ν + 2$ για $ν = 2$ δίνει $α_3 = α_2 + 2 \overset{α_3=3}{\Leftrightarrow} 3 = α_2 + 2 \Leftrightarrow α_2 = 1$

για $ν = 1$ δίνει $α_2 = α_1 + 2 \overset{α_2=1}{\Leftrightarrow} 1 = α_1 + 2 \Leftrightarrow α_1 = – 1$

για $ν = 3$ δίνει $α_4 = α_3 + 2 \overset{α_3=3}{=} 3 + 2 = 5$

για $ν = 4$ δίνει $α_5 = α_4 + 2 \overset{α_4=5}{=} 5 + 2 = 7$

Ομοίως δουλεύοντας για την δεύτερη ακολουθία βρίσκουμε ότι

$α_3 = – 7$, $α_2 = – 4$, $α_1 = – \dfrac{5}{2}$ και $α_5 = – 25$

Συμπληρωμένος ο πίνακας

Ακολουθία	$α_1$	$α_2$	$α_3$	$α_4$	$α_5$
$α_{ν+1} = α_ν + 2$	– 1	1	3	5	7
$α_{ν+1} = 2α_ν + 1$	$-\dfrac{5}{2}$	– 4	– 7	– 13	– 25