

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πολυωνυμική εξίσωση

Λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $P(x) = 0$, όπου $P(x)$ πολώνυμο.

2.

Ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης

Λέγεται κάθε ρίζα του αντίστοιχου πολωνύμου.

3.

Μέθοδος λύσης πολυωνυμικής εξίσωσης

Παραγοντοποίηση.

4.

Θεώρημα ακέραιων ριζών

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ με ακέραιους συντελεστές.}$$

Αν ο ακέραιος $p \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο p είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Επισημάνση : Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι πιθανές ρίζες.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Για να λύσω ανίσωση $P(x) > < 0$

α) Παραγοντοποιώ το $P(x)$

β) Διαγράφω τους θετικούς και τους αρνητικούς παράγοντες.

Προσοχή στους αρνητικούς, αλλάζουν τη φορά της ανίσωσης.

γ) Δημιουργώ πίνακα μεταβολών προσήμου.

2.

Σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$

Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$.

3.

Σημεία τομής των C_f , C_g

Λύνω την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

4.

Διαστήματα του άξονα $x'x$ στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

Λύνω την ανίσωση $f(x) > 0$.

5.

Διαστήματα του άξονα $x'x$ στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$:

Λύνω την ανίσωση $f(x) < 0$.

6.

Διαστήματα του άξονα $x'x$ στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g

Λύνω την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \\ (x-2)(x^2-1) &= 0 \\ (x-2)(x-1)(x+1) &= 0 \\ x-2=0 \quad \text{ή} \quad x-1=0 \quad \text{ή} \quad x+1=0 \\ x=2 \quad \text{ή} \quad x=1 \quad \text{ή} \quad x=-1 \end{aligned}$$

2.

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + x^3 - 4x - 16 = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 4x - 16 = 0 &\Leftrightarrow x^4 - 16 + x(x^2 - 4) = 0 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 4) + x(x^2 - 4) &= 0 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 4 + x) &= 0 \\ x^2 - 4 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x + 4 = 0 \\ \bullet \quad x^2 - 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2 \\ \bullet \quad x^2 + x + 4 = 0 &\quad \Delta = 1 - 16 = -15 < 0 \quad \text{άρα δεν έχει ρίζες} \end{aligned}$$

3.

Να λυθεί η εξίσωση $x^3 + 5x^2 - 6 = 0$

Προτεινόμενη λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -6
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Σχήμα Horner για $\rho = 1$

1	5	0	-6	1
	1	6	6	
1	6	6	0	

$$\text{Η εξίσωση γράφεται } x^3 + 5x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 6x + 6) = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$\Delta = 36 - 24 = 12$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

4.

Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση $x^4 - (2\lambda - 1)x^3 + 5\lambda x + 2 = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

Προτεινόμενη λύση

Οι ακέραιες ρίζες που μπορεί να έχει η εξίσωση είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2$.

Για να είναι το 1 ρίζα, πρέπει

$$1^4 - (2\lambda - 1)1^3 + 5\lambda \cdot 1 + 2 = 0$$

$$1 - 2\lambda + 1 + 5\lambda + 2 = 0$$

$$3\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

Για να είναι το -1 ρίζα, πρέπει

$$(-1)^4 - (2\lambda - 1)(-1)^3 + 5\lambda(-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2\lambda - 1 - 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-3\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Για να είναι το 2 ρίζα, πρέπει

$$2^4 - (2\lambda - 1)2^3 + 5\lambda \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 - 16\lambda + 8 + 10\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-6\lambda = -26 \Leftrightarrow \lambda = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Για να είναι το -2 ρίζα, πρέπει

$$(-2)^4 - (2\lambda - 1)(-2)^3 + 5\lambda(-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 - (2\lambda - 1)(-8) - 10\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 + 16\lambda - 8 - 10\lambda + 2 = 0$$

$$6\lambda = -10 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

5.

Να δείξετε ότι, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $3x^4 - 5x^3 + \kappa^2 x^2 + 2x + \kappa + 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει ακέραιες ρίζες

Προτεινόμενη λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 1, δηλαδή οι ± 1

$$\begin{aligned} \text{Αν } 0 \neq 1 \text{ είναι ρίζα, τότε } & 3 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 + \kappa^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \kappa + 1 = 0 \\ & 3 - 5 + \kappa^2 + 2 + \kappa + 1 = 0 \\ & \kappa^2 + \kappa + 1 = 0, \text{ που είναι αδύνατη} \\ & \text{αφού } \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } 0 \neq -1 \text{ είναι ρίζα, τότε } & 3(-1)^4 - 5(-1)^3 + \kappa^2(-1)^2 + 2(-1) + \kappa + 1 = 0 \\ & 3 + 5 + \kappa^2 - 2 + \kappa + 1 = 0 \\ & \kappa^2 + \kappa + 7 = 0, \text{ που είναι αδύνατη} \\ & \text{αφού } \Delta = 1 - 28 = -27 < 0 \end{aligned}$$

6.

Να βρείτε τις τιμές των κ και λ , ώστε η εξίσωση $x^3 - (\kappa - 2\lambda)x^2 + \lambda x + 1 = 0$ να έχει το μέγιστο δυνατό αριθμό ακεραίων ριζών.

Προτεινόμενη λύση

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 1, δηλαδή οι ± 1

Για να ικανοποιείται το πρόβλημα θα πρέπει και οι δύο αριθμοί να είναι ρίζες της

$$\begin{aligned} \text{εξίσωσης, οπότε πρέπει } & \begin{cases} 1^3 - (\kappa - 2\lambda)1^2 + \lambda \cdot 1 + 1 = 0 \\ (-1)^3 - (\kappa - 2\lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} 1 - \kappa + 2\lambda + \lambda + 1 = 0 \\ -1 - \kappa + 2\lambda - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} \kappa = 3\lambda + 2 \\ \lambda = \kappa \end{cases} \\ & \begin{cases} \lambda = 3\lambda + 2 \\ \lambda = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \kappa = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

7.

Να λυθεί η εξίσωση $x^{10} - 9x^5 + 8 = 0$

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $x^5 = y$

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση γίνεται } & y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ & y = 1 \quad \text{ή} \quad y = 8 \\ & x^5 = 1 \quad \text{ή} \quad x^5 = 8 \\ & x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt[5]{8} \end{aligned}$$

Βοηθητικός
άγνωστος

8.

Να λυθεί η εξίσωση $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x \neq 0$

Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$

Η εξίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \quad \text{ή} \quad y = 3$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{ή} \quad x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 + 1 = 2x \quad \text{ή} \quad x^2 + 1 = 3x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Βοηθητικός
άγνωστος

9.

Να λυθεί η εξίσωση $(x^3 - 7x - 5)^2 - (2x^3 - 14x) + 17 = 6$.

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $x^3 - 7x = y$ **(1)**

Η εξίσωση γίνεται $(y - 5)^2 - 2y + 17 = 6$

$$y^2 - 10y + 25 - 2y + 17 = 6$$

$$y^2 - 12y + 36 = 0$$

$$(y - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

Η (1) $\Leftrightarrow x^3 - 7x = 6$

$$(x + 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

Horner για $x = -1$

10.

Να λυθεί η ανίσωση $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$

Προτεινόμενη λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 6
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Σχήμα Horner για $\rho = 1$

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Σχόλιο 1

Η ανίσωση γράφεται $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 2, 3

Η ανίσωση γράφεται $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$

Πίνακας μεταβολών προσήμου

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$(x-1)(x-2)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

Άρα $1 < x < 2$ ή $x > 3$

11.

Να λυθεί η ανίσωση $-x^3 - 2x + 3 < 0$

Προτεινόμενη λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 3
 $\pm 1, \pm 3$

Σχήμα Horner για $\rho = 1$

-1	0	-2	3	1
	-1	-1	-3	
-1	-1	-3	0	

Σχόλιο 1

Η ανίσωση γράφεται $(x - 1)(-x^2 - x - 3) < 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $a = -1$
 δηλαδή αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ανίσωση γίνεται $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

12.

Να λυθεί η ανίσωση $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \geq 0$

Προτεινόμενη λύση

Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\pm 1, \pm 3$

Σχόλιο 1

Σχήμα Horner για $\rho = -1$

1	-4	2	4	-3	-1
	-1	5	-7	3	
1	-5	7	-3	0	

Η ανίσωση γράφεται $(x + 1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) \geq 0$

Σχήμα Horner για $\rho = 1$

1	-5	7	-3	1
	1	-4	3	
1	-4	3	0	

Η ανίσωση γράφεται $(x + 1)(x - 1)(x^2 - 4x + 3) \geq 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $1, 3$

Η ανίσωση γίνεται $(x + 1)(x - 1)(x - 1)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$$

$$(x + 1)(x - 3) \geq 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0$$

$$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

13.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = -12x^3 - 8x^2 - 8x + 5$

i) Να γίνει η διαίρεση $P(x) : (-3x + 1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{array}{r|l} -12x^3 - 8x^2 - 8x + 5 & -3x + 1 \\ \underline{12x^3 - 4x^2} & 4x^2 + 4x + 4 \\ -12x^2 - 8x + 5 & \\ \underline{12x^2 - 4x} & \\ -12x + 5 & \\ \underline{12x - 4} & \\ 1 & \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης : $-12x^3 - 8x^2 - 8x + 5 = (-3x + 1)(4x^2 + 4x + 4) + 1 \quad (1)$

ii)

$$\begin{aligned} -12x^3 - 8x^2 - 8x + 5 > 1 & \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (-3x + 1)(4x^2 + 4x + 4) + 1 > 1 \\ & \Leftrightarrow (-3x + 1)4(x^2 + x + 1) > 0 \\ & \Leftrightarrow (-3x + 1)(x^2 + x + 1) > 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $a = 1$
δηλαδή θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ανίσωση γίνεται $-3x + 1 > 0 \Leftrightarrow -3x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$

14.

Έστω η πολυώνυμική συνάρτηση $P(x) = \kappa x^3 - (2\kappa + \lambda)x^2 - x + 3$

- i) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ , ώστε η $P(x)$ να έχει παράγοντες τους $x - 1$ και $x + 1$
- ii) Για τις τιμές $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$.
- iii) Να βρείτε τα διαστήματα του άξονα $x'x$ στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned}
 x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x) &\Leftrightarrow P(1) = 0 \\
 \kappa \cdot 1^3 - (2\kappa + \lambda)1^2 - 1 + 3 &= 0 \\
 \kappa - 2\kappa - \lambda - 1 + 3 &= 0 \\
 \kappa + \lambda &= 2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + 1 \text{ παράγοντας του } P(x) &\Leftrightarrow P(-1) = 0 \\
 \kappa(-1)^3 - (2\kappa + \lambda)(-1)^2 - (-1) + 3 &= 0 \\
 -\kappa - 2\kappa - \lambda + 1 + 3 &= 0 \\
 3\kappa + \lambda &= 4 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$

ii)

Για $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ είναι $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Σχόλιο 2

$$\begin{aligned}
 \text{Λύνουμε την εξίσωση } P(x) = 0 &\Leftrightarrow \\
 x^3 - 3x^2 - x + 3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$x = 1, \quad x = -1, \quad x = 3.$$

Horner για $x = 1$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$ είναι τα $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $\Gamma(3, 0)$.

iii)

$$\begin{aligned}
 \text{Λύνουμε την ανίσωση } P(x) > 0 &\Leftrightarrow \\
 x^3 - 3x^2 - x + 3 &> 0 \\
 (x + 1)(x - 1)(x - 3) &> 0
 \end{aligned}$$

Σχόλιο 4

Πίνακας μεταβολών προσήμου

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$(x-1)(x-2)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $-1 < x < 1$ ή $x > 3$

Τα ζητούμενα διαστήματα είναι $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

15.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - x + 13$ και $g(x) = 2x + 11$.

i) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f , C_g

ii) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g

Προτεινόμενη λύση

i)

Λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ x^3 - x + 13 &= 2x + 11 \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x^2 + x - 2) &= 0 \\ x-1 &= 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 2 = 0 \\ x &= 1 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Horner για $x=1$

$$g(1) = 2 \cdot 1 + 11 = 13 \quad \text{και} \quad g(-2) = 2(-2) + 11 = 7$$

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι τα $A(1, 13)$, $B(-2, 7)$

ii)

Λύνουμε την ανίσωση

$$\begin{aligned} f(x) &> g(x) \Leftrightarrow \\ x^3 - 3x + 2 &> 0 \\ (x-1)(x-1)(x+2) &> 0 \\ (x-1)^2(x+2) &> 0 \\ x-1 &\neq 0 \quad \text{και} \quad x+2 > 0 \\ x &\neq 1 \quad \text{και} \quad x > -2 \end{aligned}$$

Σχόλιο 6

Τα ζητούμενα διαστήματα είναι $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$

16.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^3 - (\kappa + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

i) Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.

ii) Για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$, να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ με το πολυώνυμο $2x + 1$, και να γραφεί η ταυτότητα αυτής της διαίρεσης.

iii) Για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$, να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \Leftrightarrow \kappa\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa + \lambda)\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 7$$

$$-\frac{1}{8}\kappa - (\kappa + \lambda)\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 7$$

$$-\kappa - 2(\kappa + \lambda) - 4\lambda + 8 = 56$$

$$-\kappa - 2\kappa - 2\lambda - 4\lambda = 48$$

$$3\kappa + 6\lambda = -48$$

$$\kappa + 2\lambda = -16 \quad (1)$$

$$P(-1) = 23 \Leftrightarrow \kappa(-1)^3 - (\kappa + \lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1 = 23$$

$$-\kappa - \kappa - \lambda - \lambda = 22$$

$$-2\kappa - 2\lambda = 22$$

$$\kappa + \lambda = -11 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$

ii)

Για τις παραπάνω τιμές των κ και λ είναι $P(x) = -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$

$$\begin{array}{r|l} -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 & 2x+1 \\ \hline 6x^3 + 3x^2 & -3x^2 + 7x - 6 \\ \hline 14x^2 - 5x + 1 & \\ -14x^2 - 7x & \\ \hline -12x + 1 & \\ 12x + 6 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης $-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7$ **(3)**

iii)

$$\begin{aligned} P(x) > 7 & \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7 > 7 \\ & (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) > 0 \\ & (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) > 0 \\ & \Delta = 49 - 72 = -23 < 0 \quad \text{άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο} \\ & \quad \text{του } \alpha = -3, \text{ δηλαδή αρνητικό.} \end{aligned}$$

$$\text{Η ανίσωση γίνεται } 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

17.

Να λυθεί η ανίσωση $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 4x + 4)(x^2 + x + 5) \leq 0$

Προτεινόμενη λύση

Η Δ του τριωνύμου $x^2 - 7x + 12$ είναι $\Delta = 1 > 0$ και οι ρίζες του 3 και 4.
Άρα $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

Η Δ του τριωνύμου $x^2 - 4x + 4$ είναι $\Delta = 0$ και η διπλή ρίζα του το 2.
Άρα $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Η Δ του τριωνύμου $x^2 + x + 5$ είναι $\Delta = -19 < 0$.

Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή θετικό.

$$\begin{aligned} \text{Επομένως η δοσμένη ανίσωση γράφεται } (x - 3)(x - 4)(x - 2)^2 \leq 0 & \Leftrightarrow \\ (x - 3)(x - 4) \leq 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0 & \Leftrightarrow \\ 3 \leq x \leq 4 \quad \text{ή} \quad x = 2 & \end{aligned}$$