$4^{η}$ Δεκάδα θεμάτων επανάληψης

31.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και Μ το μέσο του ΒΓ .

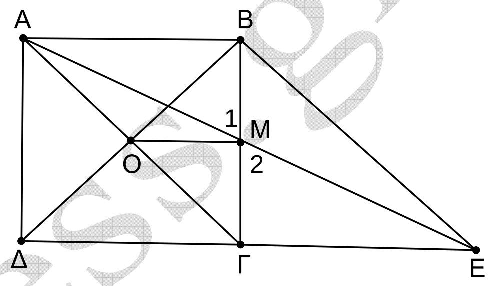
Η ΑΜ τέμνει την ΔΓ στο Ε . Δείξτε ότι

i) ΓΕ = ΓΔ

ii) Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

iii) $ΟΜ = \dfrac{ΔΕ}{4}$

Προτεινόμενη λύση



i)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ έχουν

ΒΜ = ΜΓ και $\widehat{Μ}_1 = \widehat{Μ}_2$ άρα είναι ίσα οπότε

ΓΕ = ΑΒ = ΔΓ

ii)

Στο τρίγωνο ΔΒΕ το ΒΓ είναι ύψος και διάμεσος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές επειδή επιπλέον ισχύει $ΒΓ = ΓΔ = \dfrac{ΔΕ}{2}$ το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο

iii)

Τα Ο και Μ είναι μέσα των ΒΔ και ΒΓ άρα

$$ΟΜ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{\frac{ΔΕ}{2}}{2} = \frac{ΔΕ}{4}$$

32.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ τα Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα η δε ευθεία ΜΝ τέμνει την διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ στο Δ . Δείξτε ότι

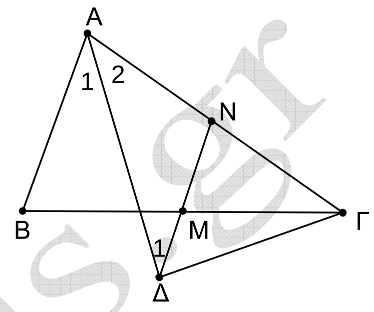
i) ΝΑ = ΝΔ

ii) $\Gamma\Delta \perp A\Delta$

iii) $A\Gamma - AB = 2\Delta M$

Προτεινόμενη λύση

i)



Τα Μ και Ν είναι μέσα των ΒΓ και ΑΓ

άρα ΜΝ // ΑΒ οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ με

τέμνουσα την ΑΔ ακόμα είναι και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ άρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$

συνεπώς ΝΑ = ΝΔ

ii)

Στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΝ είναι διάμεσος και $\Delta N = AN = \frac{A\Gamma}{2}$ άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΓ

iii)

$$2\Delta M = 2(\Delta N - MN) = 2\left(\frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2}\right) = A\Gamma - AB$$

33.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ δείξτε ότι

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται σε σημείο Ε πάνω στην ΓΔ

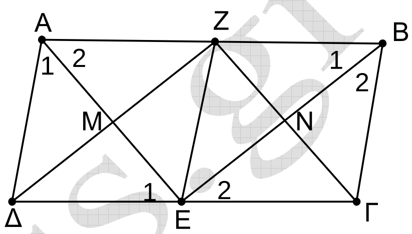
ii) Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει τη ΑΒ στο Ζ τότε το ΑΖΕΔ είναι ρόμβος

iii) $A\hat{E}B = 90^o$

iv) Αν η ΔΖ τέμνει την ΑΕ στο Μ και η ΓΖ την ΒΕ στο Ν τότε το ΕΜΖΝ είναι ορθογώνιο

Προτεινόμενη λύση

i)



Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την ΔΓ στο Ε θα αποδείξουμε ότι η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$ (εντός εναλλάξ) άρα $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ οπότε ΑΔ = ΔΕ **(1)**

Από την υπόθεση ΑΒ = 2ΒΓ προκύπτει ότι $B\Gamma = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}$

και λόγω της **(1)** $\Delta E = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = E\Gamma = B\Gamma$

Αφού ΕΓ = ΒΓ έχουμε $\hat{E}_2 = \hat{B}_2$ και επειδή $\hat{E}_2 = \hat{B}_1$ θα είναι $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ δηλαδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

ii)

Οι διχοτόμοι ΑΕ και ΔΖ των διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ αφού έχει την ΑΜ διχοτόμο και ύψος θα είναι ισοσκελές δηλαδή ΑΔ = ΑΖ

Αφού λοιπόν τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΕ είναι ισοσκελή στο τετράπλευρο ΑΖΕΔ οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται συνεπώς αυτό είναι ρόμβος .

iii)

Επειδή οι ΑΕ και ΒΕ είναι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αυτές είναι κάθετες άρα $A\hat{E}B = 90^o$

iv)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και η ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ συνεπώς όλες οι γωνίες του ΕΜΖΝ είναι ορθές οπότε αυτό είναι ορθογώνιο

34.

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και μία διάμετρός ΡΜ του κύκλου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ (το Ρ είναι στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΑΓ}$) . Έστω ότι Κ και Λ είναι οι προβολές των Ρ και Μ αντίστοιχα πάνω στην ευθεία ΑΒ . Να δείξετε ότι

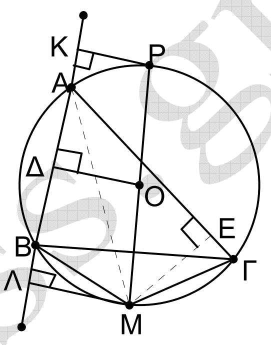
i) ΑΚ =ΒΛ

ii) ΑΛ − ΑΚ = ΑΒ

iii) ΑΚ + ΑΛ = ΑΓ

Προτεινόμενη λύση

i)



Έστω Κ και Λ οι προβολές των Ρ και Μ στην ευθεία ΑΒ φέρω το απόστημα ΟΔ της χορδής ΑΒ τότε ΔΑ = ΔΒ **(1)** και ΡΚ // ΟΔ //ΜΛ σαν κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία

Το τετράπλευρο ΡΚΛΜ είναι τραπέζιο και αφού Ο το μέσο της ΡΜ και ΟΔ // ΡΚ //ΜΛ η ΟΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου άρα

ΔΚ = ΔΛ **(2)**

Αφαιρώντας από την (2) την (1) έχουμε ΔΚ − ΔΑ= ΔΛ − ΔΒ $\Leftrightarrow$ ΚΑ = ΒΛ

ii)

ΑΛ − ΑΚ = λόγω του (i) = ΑΛ − ΒΛ = ΑΒ

iii)

Φέρω το ΜΕ $\perp$ ΑΓ τότε

τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΜΕ είναι ίσα διότι

είναι ορθογώνια , έχουν την ΑΜ κοινή και $Λ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Ε$ δεδομένου ότι το Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΜΓ}$ άρα ΑΛ = ΑΕ **(3)**

Επίσης

Τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΜΕΓ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια

και έχουν ΜΒ = ΜΓ και ΜΛ = ΜΕ επειδή η ΑΜ διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$ άρα ΒΛ= ΕΓ **(4)** Τώρα

λόγω των **(i)** **(3)** και **(4)** έχουμε ΑΚ + ΑΛ = ΒΛ + ΑΕ = ΕΓ + ΑΕ = ΑΓ

35.

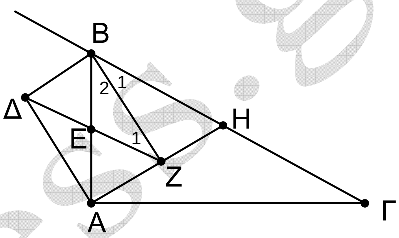
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η υποτείνουσα ΒΓ είναι διπλάσια από την ΑΒ . Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΖ και ΑΔ στην εσωτερική και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$. Η ΑΖ προεκτεινόμενη τέμνει την ΒΓ στο Η . Δείξτε ότι

i) ΔΖ // ΒΓ

ii) Ζ μέσο της ΑΗ και Η μέσο της ΒΓ

iii) $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$

Προτεινόμενη λύση



i) Επειδή οι ΒΔ και ΒΖ είναι διχοτόμοι εφεξής παραπληρωματικών γωνιών θα είναι $Δ\hat{B}Z = 90^o$

Στο τετράπλευρο ΔΒΖΑ έχουμε

$Δ\hat{B}Z = 90^o$, $B\hat{Δ}A = 90^o$ και $A\hat{Z}B = 90^o$

άρα αυτό είναι ορθογώνιο οπότε ΑΒ = ΔΖ επομένως

και ΒΕ = ΕΖ $\Leftrightarrow$ $\hat{Z}_1 = \hat{B}_2$

αφού όμως είναι και $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ θα είναι και $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1$ άρα ΔΖ // ΒΓ

ii)

Το Ε είναι μέσο του ΑΒ και ΕΖ// ΒΗ άρα το Ζ είναι μέσο του ΑΗ

Επίσης στο τρίγωνο ΒΑΗ το ΒΖ είναι διχοτόμος και ύψος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές επομένως ΒΗ = ΒΑ = από την υπόθεση $= \frac{ΒΓ}{2}$ άρα Η μέσο του ΒΓ

iii)

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$ και επειδή

$ΔΖ = ΑΒ$ θα είναι και $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$

36.

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο , ΑΔ ύψος αυτού και ΑΕ διάμετρος του κύκλου . Από το Γ φέρνουμε τμήμα ΓΖ$\perp$ ΑΕ . Να αποδείξετε ότι

i) Τα σημεία Α, Δ , Ζ , Γ είναι ομοκυκλικά

ii) ΖΔ // ΒΕ

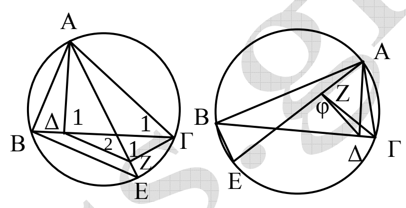
iii) ΖΔ $\perp$ ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

i)

Και στα δύο σχήματα είναι

$A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o = A\hat{Z}\Gamma$ οπότε τα τετράπλευρα ΑΔΖΓ στο αριστερά σχήμα και ΑΖΔΓ στο δεξιά είναι εγγράψιμα σε κύκλο δηλαδή τα σημεία Α, Δ, Ζ και Γ είναι ομοκυκλικά



ii)

Στο αριστερά σχήμα από το εγγράψιμο ΑΔΖΓ έχουμε ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$ όμως $\hat{\Gamma}_1 = A\hat{E}B$ σαν εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο άρα $\hat{Z}_2 = A\hat{E}B$ οπότε ΔΖ// ΒΕ

στο δεξιά σχήμα από το εγγράψιμο ΑΖΔΓ έχουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}$ αλλά και

$A\hat{\Gamma}B = B\hat{E}A$ σαν εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο οπότε $\hat{\varphi} = B\hat{E}A$ επομένως ΔΖ // ΒΕ

iii)

Επειδή η γωνία $A\hat{B}E$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο αυτή είναι ορθή συνεπώς ΒΕ$\perp$ΑΒ επομένως και η παράλληλη ΔΖ της ΒΕ θα είναι κάθετη στην ΑΒ

37.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ. Αν Ε τυχαίο σημείο του ύψους ΑΔ και η κάθετη στην ΒΕ στο Ε τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ζ , να αποδείξετε ότι

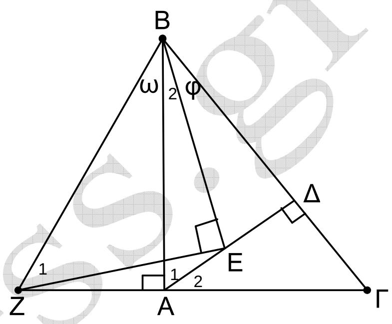
i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι όμοια

ii) $A\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma$

iii) ΑΒ ·ΒΕ = ΒΔ·ΒΖ

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή $B\hat{E}Z = B\hat{A}Z = 90^o$ το τετράπλευρο ΒΕΑΖ είναι εγγράψιμο άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$

επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ σαν συμπληρωματικές της $\hat{A}_2$

οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$ Αφού λοιπόν στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$ τα τρίγωνα είναι όμοια

ii)

Είναι $\hat{\omega} + \hat{B}_2 + \hat{Z}_1 = 90^o$ και $\hat{\varphi} + \hat{B}_2 + \hat{\Gamma} = 90^o$ άρα

$\hat{\omega} + \hat{B}_2 + \hat{Z}_1 = \hat{\varphi} + \hat{B}_2 + \hat{\Gamma}$ και δεδομένου ότι $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$ έχουμε

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ δηλαδή $A\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma$

iii)

Η ζητούμενη σχέση γράφεται $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{BZ}{BE}$ **(1)**

τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΕΔ έχουν $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ άρα είναι όμοια οπότε ισχύει η **(1)**

38 .

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού .

Από το Β φέρνουμε κάθετο στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την ΑΓ στο Η και από το Γ φέρνουμε κάθετο στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ζ και την προέκταση της ΑΒ στο Θ ακόμα έστω Μ το μέσο της ΒΓ . Να αποδείξετε ότι

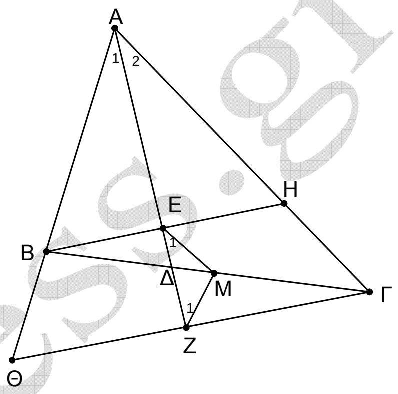
i) Το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές

ii) $E\widehat{M}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

iii) Το τετράπλευρο ΒΗΓΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Προτεινόμενη λύση

i)



Στο τρίγωνο ΑΒΗ η ΑΕ είναι διχοτόμος και ύψος συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το Ε είναι μέσο του ΒΗ

Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Ε και Μ είναι μέσα των ΒΗ και ΒΓ άρα ΕΜ // ΗΓ δηλαδή

ΕΜ // ΑΓ οπότε $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ **(1)** ως εντός εκτός των παραλλήλων ΕΜ και ΑΓ με τέμνουσα την ΑΓ

Ομοίως το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισοσκελές και Ζ μέσο της ΘΓ οπότε

ΜΖ // ΒΘ δηλαδή ΜΖ // ΑΘ άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ **(2)** ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΘ και ΜΖ με τέμνουσα την ΑΖ . Όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ άρα από τις **(1)** και **(2)** έχουμε

ότι $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ επομένως το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές

ii)

$$E\widehat{M}Z = 180^o - \hat{E}_1 - \hat{Z}_1 = 180^o - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} = 180^o - \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$$

iii)

ΒΗ // ΓΘ σαν κάθετα στην ΑΔ επομένως το ΒΗΓΘ είναι τραπέζιο και επειδή ΒΘ = ΗΓ σαν διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΓ = ΑΘ και ΑΗ = ΑΒ το τραπέζιο είναι ισοσκελές .

39.

Σε κύκλο (Ο , R) δίνονται τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 180^o$ και ΒΕ διάμετρος του κύκλου . Να αποδείξετε ότι

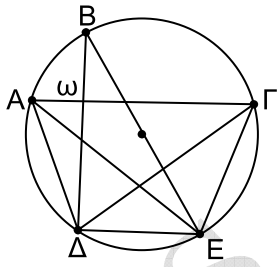
i) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες

ii) $A\Gamma \parallel \Delta E$

iii) ΑΕ = ΓΔ

Προτεινόμενη λύση

i)



Αν $\hat{\omega}$ είναι η γωνία των δύο χορδών γνωρίζουμε ότι το μέτρο της είναι ίσο με

$\hat{\omega} = \frac{1}{2}[\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}] = \frac{1}{2}\cdot 180^o = 90^o$

άρα $A\Gamma \perp B\Delta$

ii)

Επειδή ΒΕ διάμετρος θα είναι $B\hat{\Delta}E = 90^o$ επομένως $\Delta E \perp B\Delta$

αφού λοιπόν $A\Gamma \perp B\Delta$ και $\Delta E \perp B\Delta$ θα είναι $A\Gamma \parallel \Delta E$

iii)

Επειδή $A\Gamma \parallel \Delta E$ είναι $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma E} \Leftrightarrow A\Delta = \Gamma E$ άρα

το τετράπλευρο ΑΔΕΓ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές οπότε οι διαγώνιες του είναι ίσες δηλαδή ΓΔ = ΑΕ

40 .

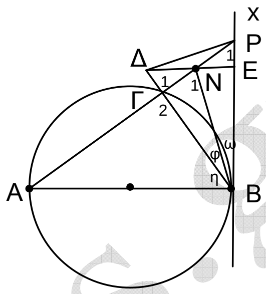
Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) μία διάμετρο ΑΒ αυτού, την εφαπτομένη στο Β και ένα σημείο Γ του κύκλου . Η ΑΓ τέμνει την εφαπτομένη στο Ρ και πάνω στην ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΡ . Αν η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΡ στο Ν να αποδείξετε ότι

i) Η ΒΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}P$

ii) ΑΝ = ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος η γωνία $\hat{\Gamma}_2$ είναι ορθή οπότε το ΡΓ είναι ύψος στο τρίγωνο ΒΔΡ Ακόμα $AB \perp Bx$ και έστω ότι το ΔΝ τέμνει την Βx στο Ε .Αφού ΔΝ //ΑΒ θα είναι και $\Delta N \perp Bx$ οπότε το ΔΕ είναι το δεύτερο ύψος του τριγώνου ΔΒΡ συνεπώς το Ν είναι το ορθόκεντρο του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΡ κατά συνέπεια το ΒΝ θα είναι ο φορέας του τρίτου ύψους του ισοσκελούς τριγώνου ΒΡΔ οπότε η ΒΝ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}P$

ii)

Η γωνία $\hat{N}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΝΒΡ άρα

$\hat{N}_1 = \hat{P}_1 + \hat{\omega}$ **(1)**

Επίσης

$A\hat{B}N = \hat{\eta} + \hat{\varphi}$ **(2)**

όμως $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ λόγω του **(i)** και $\hat{P}_1 = \hat{\eta}$ σαν συμπληρωματικές της $\hat{A}$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε ότι $\hat{N}_1 = A\hat{B}N$ άρα ΑΝ = ΑΒ .