$3^{η}$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

21.

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 45^{o}$.

Έστω Ε , Ζ τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα και $ΑΗ \perp ΔΓ$.

Από το Ζ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ που τέμνει την ΓΔ στο Θ . Να δείξετε ότι

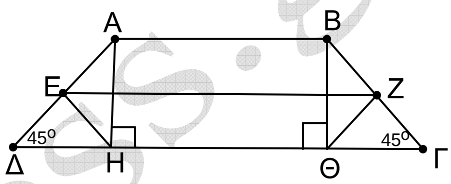
i) Το τετράπλευρο ΗΘΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο

ii) $Β\hat{Θ}Γ = 90^{o}$ και $Θ\hat{Ζ}Γ = 90^{o}$

iii) ΕΖ + ΑΗ = ΓΔ

Προτεινόμενη λύση

i)



Η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου άρα

ΕΖ // ΔΓ και επειδή ΖΘ // ΕΔ το ΕΖΘΔ είναι

παραλληλόγραμμο συνεπώς το ΕΖΘΗ τραπέζιο

Από το παραλληλόγραμμο ΕΖΘΔ έχουμε ότι ΖΘ = ΕΔ και από το ορθογώνιο τρίγωνο

ΑΗΔ επειδή η ΗΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $ΕΗ = \frac{ΑΔ}{2} = ΕΔ$

δηλαδή ΖΘ = ΕΗ συνεπώς το τραπέζιο ΕΖΘΗ είναι ισοσκελές

ii)

Στο τρίγωνο ΒΘΓ η ΘΖ είναι διάμεσος και $ΘΖ = ΕΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}$ επομένως

$Β\hat{Θ}Γ = 90^{o}$

Επειδή ΘΖ = ΖΓ και $\hat{Γ} = 45^{o}$ θα είναι και $Ζ\hat{Θ}Γ = \hat{Γ} = 45^{o}$

συνεπώς η τρίτη γωνία $Θ\hat{Ζ}Γ$ του τριγώνου ΘΖΓ θα είναι 90^{o}

iii)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ αφού ΑΔ = ΒΓ και $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 45^{o}$ είναι ίσα

ισοσκελή άρα ΔΗ = ΑΗ = ΒΘ = ΘΓ

και φανερά από το ορθογώνιο ΑΒΘΗ έχουμε ότι ΑΒ = ΗΘ οπότε

$$ΕΖ + ΑΗ = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2} + ΔΗ = \frac{ΗΘ + ΔΓ + 2ΔΗ}{2} =$$

$$= \frac{ΗΘ + ΔΓ + ΔΗ + ΘΓ}{2} = \frac{2ΔΓ}{2} = ΔΓ$$

22.

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο το Ο και ΑΒ > ΒΓ , ΑΓ = 2ΒΓ . Αν η κάθετος στην ΒΔ στο Ο τέμνει την ΑΔ στο Ε και την ΑΒ στο Ζ . Να αποδείξετε ότι

i) Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο

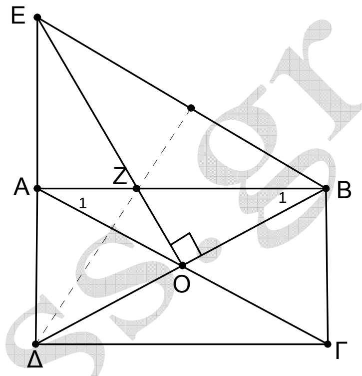
ii) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο

iii) Το τετράπλευρο ΑΕΒΟ είναι ισοσκελές τραπέζιο

iv) $\Delta Z \perp BE$

Προτεινόμενη λύση

i)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι

$B\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2}$ άρα $\widehat{A}_1 = 30^o$ και επειδή

$OB = OA$ θα είναι και $\widehat{B}_1 = 30^o$ άρα $A\widehat{\Delta}B = 60^o$

Στο τρίγωνο ΕΔΒ το ΕΟ είναι ύψος και διάμεσος οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επειδή

η γωνία του $A\widehat{\Delta}B$ είναι $A\widehat{\Delta}B = 60^o$ το τρίγωνο είναι ισόπλευρο .

ii)

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΕ αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο το ΒΑ είναι ύψος άρα θα είναι και διάμεσος επομένως ΕΑ = ΑΔ , επειδή όμως ΑΔ = // ΒΓ θα είναι και ΕΑ = // ΒΓ δηλαδή το ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο

iii)

Αφού το ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο δηλαδή ΕΒ // ΑΟ το ΑΕΒΟ είναι τραπέζιο και δεδομένου ότι $BO = \dfrac{A\Gamma}{2} = B\Gamma = AE$ το τραπέζιο είναι ισοσκελές

iv)

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΕΒΔ τα ΕΟ και ΒΑ είναι δύο ύψη του , συνεπώς , το Ζ είναι το ορθόκεντρο αυτού άρα , η ευθεία ΔΖ είναι ο φορέας του τρίτου ύψους και επομένως $\Delta Z \perp EB$

23.

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ = ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να δείξετε ότι:

i) Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ.

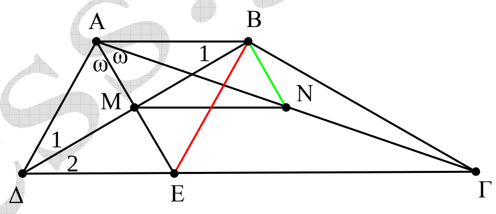
ii) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

iii) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ρόμβος.

iv) Από το σημείο Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι ΓΔ = 3ΑΒ να δείξετε ότι το ΜΝΒΑ είναι παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη λύση

i)



Αφού ΑΒ = ΑΔ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και επειδή ΑΜ διχοτόμος θα είναι και ύψος και διάμεσος οπότε $AM \perp B\Delta$ δηλαδή $B\Delta \perp AE$ και ΔΜ = ΜΒ

ii)

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ //ΔΓ με τέμνουσα την ΔΕ άρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ επομένως η ΔΒ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$

iii)

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΔΜ είναι ύψος και διχοτόμος άρα θα είναι και διάμεσος οπότε ΑΜ = ΜΕ

Επειδή ΔΜ = ΜΒ , ΑΜ = ΜΕ και $B\Delta \perp AE$ το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ρόμβος

iv)

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της διαγωνίου ΒΔ και ΜΝ // ΔΓ άρα το Ν θα είναι μέσο και της διαγωνίου ΑΓ οπότε

$MN = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \dfrac{3AB - AB}{2} = AB$ επειδή ακόμα είναι και ΜΝ // ΑΒ το ΜΝΒΑ είναι παραλληλόγραμμο

24.

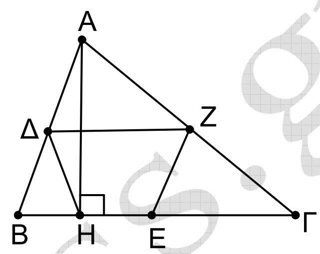
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (όπου ΑΒ < ΑΓ) και Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.

i) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Εάν ΑΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι το ΔΗΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

iii) Εάν ΗΕ =κ. και ΒΓ= 4κ, να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου ΔΗΕΖ. συναρτήσει του κ

Προτεινόμενη λύση



i)

Επειδή Δ και Ζ μέσα των ΑΒ και ΑΓ θα είναι $ΔΖ = // \frac{ΒΓ}{2} = //$ ΒΕ οπότε το ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο

ii)

Αφού το ΒΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο το ΗΔΖΕ είναι τραπέζιο (ΔΖ // ΗΕ και $ΔΖ \neq ΗΕ$)

Όμως Ζ , Ε μέσα των ΑΓ και ΒΓ άρα $ΖΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ **(1)** στο δε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ η ΔΗ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα άρα $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ **(2)**

Από τις **(1)** και **(2)** έχουμε ότι ΖΕ = ΔΗ συνεπώς το τραπέζιο είναι ισοσκελές

iii)

Αφού $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$ θα είναι ΔΖ = 2κ επομένως το μήκος της διαμέσου **δ** του τραπεζίου ΗΔΖΕ είναι ίσο με

$δ = \frac{ΔΖ + ΗΕ}{2} = \frac{3κ}{2}$

25.

Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ αυτού οι οποίες τέμνονται στο Κ . Να αποδείξετε ότι

i) ΒΔ = ΓΕ

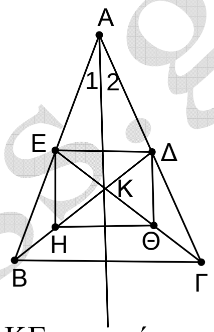
ii) Το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές

iii) Η ευθεία ΑΚ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΒΓ

iv) Αν Η και Θ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΓΚ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΘΔ είναι ορθογώνιο

Προτεινόμενη λύση

i)



Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα διότι έχουν ΑΒ = ΑΓ , ΑΔ = ΑΕ σαν μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ και την γωνία $\widehat{Α}$ κοινή άρα ΒΔ = ΓΕ

ii)

Το Κ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ οπότε $ΚΔ = \frac{1}{3}ΒΔ$ και $ΚΕ = \frac{1}{3}ΕΓ$ και λόγω του **(i)** θα είναι ΚΔ = ΚΕ συνεπώς το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές

iii)

Τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΔΚ έχουν ΑΕ = ΑΔ , ΚΕ = ΚΔ και την ΑΚ κοινή άρα είναι ίσα οπότε $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$ δηλαδή η ευθεία ΑΚ είναι ο φορέας της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{Α}$ και επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ευθεία ΑΚ είναι μεσοκάθετος στην ΒΓ

iv)

Αφού Η και Θ μέσα των ΒΚ και ΓΚ θα είναι ΗΚ = ΚΔ = ΕΚ = ΚΘ επομένως στο τετράπλευρο ΕΗΘΔ οι διαγώνιες διχοτομούνται άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή είναι και ίσες το παραλληλόγραμμο ΕΗΘΔ είναι ορθογώνιο .

26.

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 2\hat{B}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την ΓΔ στο Ε . Αν Κ, Λ, Μ, Ρ είναι τα μέσα των ΑΕ, ΑΒ, ΒΓ, και ΓΕ αντίστοιχα

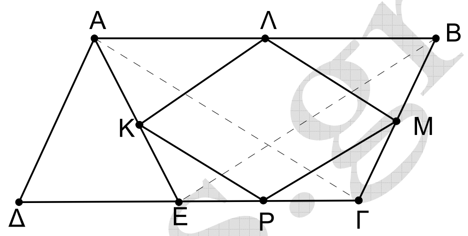
i) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου

ii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο

iii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΡ είναι ρόμβος

Προτεινόμενη λύση

i)



Γνωρίζουμε ότι $\Delta\hat{A}B + A\hat{B}\Gamma = 180^o$ άρα

$2A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 60^o$

οπότε $\Delta\hat{A}B = 120^o$

ii)

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο το ΑΒΓΕ είναι τραπέζιο

(ΑΒ // ΕΓ και ΑΕ $\nparallel$ ΒΓ)

Επίσης έχουμε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ άρα $E\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} = \hat{B}$

Συνεπώς το τραπέζιο είναι ισοσκελές

iii)

Τα Κ , Λ , Μ , Ρ είναι μέσα των ΑΕ , ΑΒ , ΒΓ και ΓΕ άρα το

Κ Λ Μ Ρ είναι παραλληλόγραμμο

όμως $K\Lambda = \frac{BE}{2}$ και $\Lambda M = \frac{A\Gamma}{2}$ επειδή δε το τραπέζιο ΑΒΓΕ είναι ισοσκελές έχουμε

ΒΕ = ΑΓ άρα ΚΛ = ΛΜ . Αφού το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΡ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες αυτό είναι ρόμβος

27.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} > 90^o$ και ΑΒ = 2ΒΓ . Από το Γ φέρνουμε το τμήμα ΓΕ κάθετο στην ευθεία ΑΔ . Έστω ακόμα ότι Μ και Ν είναι τα μέσα των ΔΓ και ΑΒ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι

i) Η ΔΝ είναι μεσοκάθετος του ΑΜ

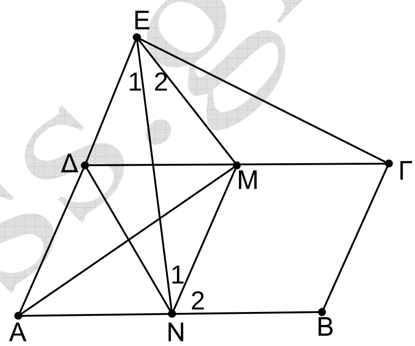
ii) Το τετράπλευρο ΜΝΑΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο

iii) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{E}M$

iv) $E\hat{N}B = 3M\hat{E}N$

Προτεινόμενη λύση

i)



Στο τετράπλευρο ΔΜΝΑ έχουμε ΔΜ = // ΑΝ οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο επειδή όμως

$AN = \dfrac{AB}{2} = B\Gamma = \Delta A$ το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος επομένως η διαγώνιος ΔΝ είναι μεσοκάθετος της ΑΜ

ii)

Είναι ΜΝ // ΕΑ και ΜΕ $\nparallel$ ΑΝ άρα το ΕΑΝΜ είναι τραπέζιο

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΕΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα άρα

$EM = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \Delta M = AN$ οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές

iii)

Από τον ρόμβο ΑΝΜΔ έχουμε ΝΜ= ΜΔ και επειδή ΜΔ= ΕΜ θα είναι

ΝΜ = ΕΜ άρα $\hat{E}_2 = \hat{N}_1$ όμως $\hat{N}_1 = \hat{E}_1$ σαν εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΜΝ με τέμνουσα την ΕΝ άρα $\hat{E}_2 = \hat{E}_1$ δηλαδή η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{E}M$

iv)

Είναι $\hat{N}_2 = \Delta\hat{A}B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΝΜ με τέμνουσα την ΑΝ και λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου ΝΑΕΜ είναι $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{E}M$

άρα $\hat{N}_2 = \Delta\hat{E}M = 2\hat{E}_2$ οπότε $E\hat{N}B = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{E}_2 + 2\hat{E}_2 = 3\hat{E}_2 = 3M\hat{E}N$

28.

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο , $A\widehat{B}\Delta = 30^o$ και Π, Κ, Μ τα μέσα των ΟΔ , ΟΓ και ΑΒ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι

i) Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο

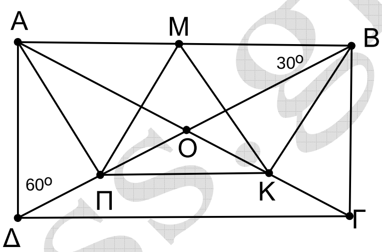
ii) Το τρίγωνο ΑΠΒ είναι ορθογώνιο

iii) Το τρίγωνο ΠΜΚ είναι ισόπλευρο

iv) Το τετράπλευρο ΑΠΚΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο του οποίου κύκλου να βρείτε το κέντρο .

Προτεινόμενη λύση

i)



Οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες οπότε και τα μισά τους θα είναι ίσα άρα ΟΑ = ΟΔ επομένως το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές επειδή δε $A\widehat{B}\Delta = 30^o$ θα είναι $A\widehat{\Delta}B = 60^o$ οπότε το ισοσκελές τρίγωνο είναι ισόπλευρο .

ii)

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΟ η ΑΠ είναι διάμεσος άρα θα είναι και ύψος συνεπώς $A\widehat{\Pi}B = 90^o$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΠΒ είναι ορθογώνιο

iii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΠΒ η ΠΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα άρα

$\Pi M = \dfrac{AB}{2}$ ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ είναι $KM = \dfrac{AB}{2}$ και επειδή Π , Κ μέσα των ΟΔ και ΟΓ θα είναι και $\Pi K = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2}$ επομένως ΠΜ = ΚΜ = ΠΚ

Δηλαδή το τρίγωνο ΠΜΚ είναι ισόπλευρο

iv)

Επειδή $A\widehat{\Pi}B = 90^o = A\widehat{K}B$ η ΑΒ στο τετράπλευρο ΑΠΚΒ φαίνεται από τα Π και Κ υπό ίσες γωνίες άρα το ΑΠΚΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο .

Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το Μ δεδομένου ότι

$MA = MB = M\Pi = MK = \dfrac{AB}{2}$.

29.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} > 90^o$. Στο Α φέρνουμε τις ημιευθείες Αx και Αy κάθετες στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα οι οποίες τέμνουν την ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι

i) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές

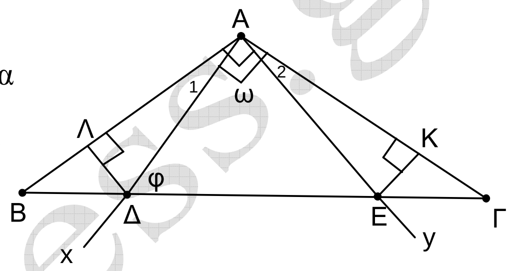
ii) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα

iii) $B\hat{A}\Delta = \dfrac{\hat{A}-2\hat{B}}{2}$

iv) Τα σημεία Ε και Δ ισαπέχουν από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα

Προτεινόμενη λύση

i)



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι ίσα διότι έχουν ΑΒ = ΑΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα ΑΔ = ΑΕ δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

ii)

Είναι ΑΒ = ΑΓ , ΑΔ = ΑΕ και $\hat{A}_1 = 90^o - \hat{\omega} = \hat{A}_2$ άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα

iii)

Στο τρίγωνο ΑΒΔ η γωνία $\hat{\varphi}$ είναι εξωτερική συνεπώς

$\hat{\varphi} = \hat{A}_1 + \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{\varphi} - \hat{B}$

από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι

$\hat{\varphi} = 90^o - \hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B}$ $\quad (\hat{B} = \hat{\Gamma})$ οπότε

$$\hat{A}_1 = 90^o - 2\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - 2\hat{B} =$$

$$= \frac{\hat{A}}{2} - \hat{B} = \frac{\hat{A}-2\hat{B}}{2}$$

iv)

Αν ΔΛ και ΕΚ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τότε τα τρίγωνα ΑΛΔ και ΑΚΕ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και επιπλέον έχουν

ΑΔ = ΑΕ , $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ άρα ΔΛ = ΕΚ

30.

Σε ευθεία (ε) παίρνουμε τα σημεία Α , Β, Γ και Δ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = α

Από τα Β και Γ προς το ίδιο μέρος τις (ε) φέρνουμε ημιευθείες Βx και Γy παράλληλες μεταξύ τους στις οποίες παίρνουμε σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε ΒΕ = ΓΖ = 2α .

Να δείξετε ότι

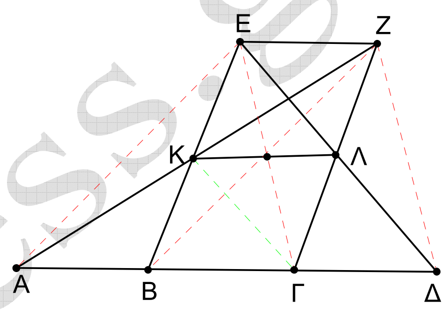
i) Η ΑΖ διέρχεται από το μέσο Κ του ΕΒ και η ΕΔ από το μέσο Λ του ΓΖ

ii) ΑΖ ⊥ ΔΕ

iii) Τα τμήματα ΕΓ , ΖΒ, και ΚΛ συντρέχουν

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή ΕΒ = // ΓΖ το ΒΕΖΓ είναι παραλληλόγραμμο

άρα ΕΖ = // ΒΓ επομένως ΕΖ = // ΑΒ

αρά το ΑΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο

και επειδή οι διαγώνιες του διχοτομούνται η ΑΖ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΒ

Ομοίως και στο παραλληλόγραμμο ΕΖΔΓ η ΕΔ διέρχεται από το μέσο Λ της ΖΓ

ii)

Στο τετράπλευρο ΕΚΛΖ έχουμε ΕΚ= // ΖΛ άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή ΕΖ = α = ΕΚ το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος συνεπώς ΕΛ ⊥ ΚΖ δηλαδή ΑΖ ⊥ ΔΕ

iii)

Φέρω την ΚΓ τότε επειδή ΕΚ = // ΛΓ το ΕΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο

στα παραλληλόγραμμα ΕΚΓΛ και ΒΕΖΓ η ΕΓ είναι κοινή διαγώνιος και οι άλλες διαγώνιες αυτών είναι οι ΚΛ και ΒΖ οπότε τα ΚΛ και ΒΖ διέρχονται από το μέσο του ΕΓ δηλαδή τα τμήματα ΕΓ , ΖΒ, και ΚΛ συντρέχουν