2^{η} Δεκάδα θεμάτων επανάληψης

11.

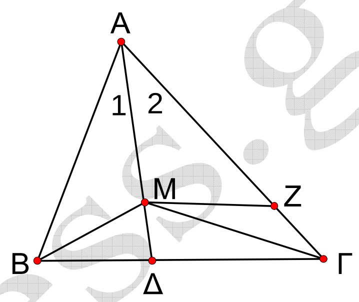
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ , αν Μ είναι σημείο στην διχοτόμο της γωνίας Α και Ν είναι σημείο στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Α , να δείξετε ότι

i) $\text{ΜΓ} - \text{ΜΒ} < \text{ΑΓ} - \text{ΑΒ}$

ii) $\text{ΝΓ} + \text{ΝΒ} > \text{ΑΓ} + \text{ΑΒ}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Ένα πρόχειρο σχήμα είναι το διπλανό

Πάνω στη πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ζ

έτσι ώστε ΑΒ = ΑΖ τότε

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΒ} = \text{ΑΖ} \\ \text{ΑΜ} = \text{ΑΜ} \\ \hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\text{ΑΜΒ}} = \overset{\triangle}{\text{ΑΜΖ}}$$

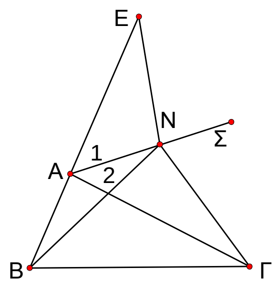
άρα θα είναι και ΜΖ = ΜΒ οπότε

$\text{ΜΓ} - \text{ΜΒ} = \text{ΜΓ} - \text{ΜΖ}$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΖΓ έχουμε

$\text{ΜΓ} - \text{ΜΖ} < \text{ΖΓ} \Leftrightarrow \text{ΜΓ} - \text{ΜΒ} < \text{ΑΓ} - \text{ΑΖ} \Leftrightarrow \text{ΜΓ} - \text{ΜΒ} < \text{ΑΓ} - \text{ΑΒ}$

ii)



Ένα πρόχειρο σχήμα είναι το διπλανό

Στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΓ τότε

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΕ} = \text{ΑΓ} \\ \text{ΑΝ} = \text{ΑΝ} \\ \hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\text{ΑΝΕ}} = \overset{\triangle}{\text{ΑΝΓ}}$$

Άρα θα είναι και ΝΕ = ΝΓ .

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο Β Ε Ν έχουμε ότι

$\text{ΒΕ} < \text{ΒΝ} + \text{ΝΕ} \Leftrightarrow \text{ΑΒ} + \text{ΑΕ} < \text{ΒΝ} + \text{ΝΓ} \Leftrightarrow \text{ΑΒ} + \text{ΑΓ} < \text{ΒΝ} + \text{ΝΓ}$

12.

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ στην προέκταση της διαγωνίου ΒΔ παίρνουμε τμήμα ΔΕ = ΒΔ . Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και Η το σημείο στο οποίο η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ τότε να αποδείξετε ότι

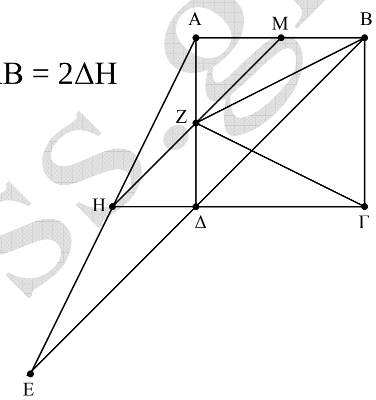
i) 2ΔΗ = ΑΒ

ii) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα

iii) Το τετράπλευρο ΗΖΒΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο

iv) Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ τότε τα σημεία Η, Ζ , Μ είναι συνευθειακά

Προτεινόμενη λύση



i)

$$\left.\begin{array}{r}\Delta \text{ μέσο του } \mathrm{BE} \\ \Delta\mathrm{H} // \mathrm{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{H} \text{ μέσο του } \mathrm{AE} \text{ και } \Delta\mathrm{H} = \frac{\mathrm{AB}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AB} = 2\Delta\mathrm{H}$$

ii) $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Delta \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2} \Rightarrow \mathrm{H}\Delta = \mathrm{Z}\Delta$

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{A}\Delta = \Delta\Gamma \\ \mathrm{H}\Delta = \mathrm{Z}\Delta \\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} = \mathrm{Z}\hat{\Delta}\Gamma = 90^{\circ}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{H} = \mathrm{Z}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$$

iii)

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{H} \text{ μέσο του } \mathrm{AE} \\ \mathrm{Z} \text{ μέσο του } \mathrm{A}\Delta\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{HZ} // \mathrm{E}\Delta \Rightarrow \mathrm{HZ} // \mathrm{EB} \text{ άρα το } \mathrm{HZBE} \text{ είναι τραπέζιο}$$

Επίσης ΗΕ = ΗΑ και από το **(ii)** ΑΗ = ΖΓ , εύκολα βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΔΓ είναι ίσα άρα ΖΓ = ΖΒ οπότε ΗΕ = ΒΖ επομένως το τραπέζιο ΗΖΒΕ είναι ισοσκελές

iv)

Στο τρίγωνο ΑΕΒ το Η είναι μέσο του ΑΕ και η ΗΖ // ΕΒ άρα η ΗΖ προεκτεινόμενη θα περάσει από το μέσο Μ του ΑΒ οπότε τα σημεία Η, Ζ , Μ είναι συνευθειακά .

13.

Δύο κύκλοι (Α, ρ) και (Β, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Κ . Προς το ίδιο μέρος της διακέντρου ΑΒ φέρουμε δύο ακτίνες ΑΓ και ΒΔ παράλληλες μεταξύ τους. Έστω Μ το μέσο του ΓΔ και Ε το σημείο τομής της ΑΜ με την ευθεία ΒΔ .
Δείξτε ότι

i) $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma M}} = \overset{\triangle}{\mathrm{M\Delta E}}$

ii) Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$

iii) $\mathrm{BM} \perp \mathrm{AE}$

iv) ΜΔ = ΜΚ

Προτεινόμενη λύση

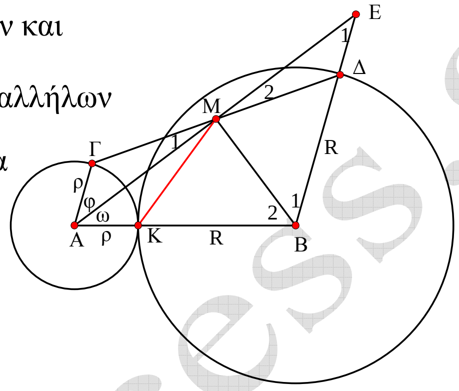
i)

ΓΜ = ΜΔ , $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2$ κατακορυφήν και

$\hat{\varphi} = \hat{\mathrm{E}}_1$ **(1)** εντός εναλλάξ των παραλλήλων

ΑΓ // ΒΕ με τέμνουσα την ΑΕ άρα

$\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma M}} = \overset{\triangle}{\mathrm{M\Delta E}}$ **(2)**



ii)

ΑΒ =ΑΚ + ΚΒ = R + ρ **(3)**

Λόγω της **(2)** ΔΕ =ΑΓ = ρ άρα

ΒΕ = ΒΔ + ΔΕ = R + ρ **(4)**

(3), (4) $\Rightarrow$ ΑΒ = ΒΕ $\Leftrightarrow \hat{\omega} = \hat{\mathrm{E}}_1$ **(5)**

(1) , (5) $\Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\omega} \Leftrightarrow$ ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$

iii)

(2) $\Rightarrow$ ΑΜ = ΜΕ συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΕ η ΒΜ είναι διάμεσος στην βάση άρα θα είναι ύψος και διχοτόμος οπότε $\mathrm{BM} \perp \mathrm{AE}$

iv)

Φέρω το ΜΚ τότε $\overset{\triangle}{\mathrm{MBK}} = \overset{\triangle}{\mathrm{M\Delta B}}$ διότι ΒΚ = ΒΔ = R , ΜΒ = ΜΒ , $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2$ επειδή ΜΒ διχοτόμος της $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ άρα ΜΚ = ΜΔ

14.

Από ένα σημείο Ρ εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ . Στις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ προς το μέρος των Α και Β παίρνουμε σημεία Γ και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΓ = ΒΔ . Έστω Κ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ και ΒΓ . Να αποδείξετε ότι

i) $\text{Ρ}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \text{Ρ}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$

ii) ΓΚ = ΚΔ

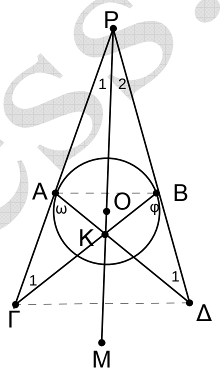
iii) Η διχοτόμος ΡΜ του τριγώνου ΡΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ

iv) Η ΡΜ διέρχεται από τα σημεία Ο και Κ

v) ΑΒ // ΓΔ

Προτεινόμενη λύση

i)



Τα τρίγωνα ΡΑΔ και ΡΒΓ είναι ίσα διότι έχουν ΡΑ = ΡΒ σαν εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ προς τον κύκλο , ΡΔ = ΡΓ σαν αθροίσματα των ίσων τμημάτων ΡΒ = ΡΑ και ΒΔ = ΑΓ και την $\text{Γ}\hat{\text{Ρ}}\text{Δ}$ κοινή άρα $\text{Ρ}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \text{Ρ}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$

ii)

Τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΚΒΔ είναι ίσα διότι έχουν ΑΓ = ΒΔ , $\hat{\text{Γ}}_1 = \hat{\text{Δ}}_1$ από την ισότητα των τριγώνων ΡΑΔ και ΡΒΓ και $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ σαν παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\text{Ρ}\hat{\text{Α}}\text{Δ}$ και $\text{Ρ}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$ άρα θα είναι και ΚΓ = ΚΔ

iii)

Επειδή το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Ρ}}$ είναι μεσοκάθετος στην βάση ΓΔ αυτού

iv)

Η διακεντρική ευθεία του Ρ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Α}\hat{\text{Ρ}}\text{Β}$ οπότε η διχοτόμος ΡΜ διέρχεται από το Ο και επειδή όπως εύκολα διαπιστώνουμε τα τρίγωνα ΡΑΚ και ΡΒΚ είναι ίσα άρα $\hat{\text{Ρ}}_1 = \hat{\text{Ρ}}_2$ συνεπώς η ΡΚ είναι διχοτόμος της $\text{Α}\hat{\text{Ρ}}\text{Β}$.

Τελικά λοιπόν η διχοτόμος ΡΜ διέρχεται από τα Ο και Κ

v)

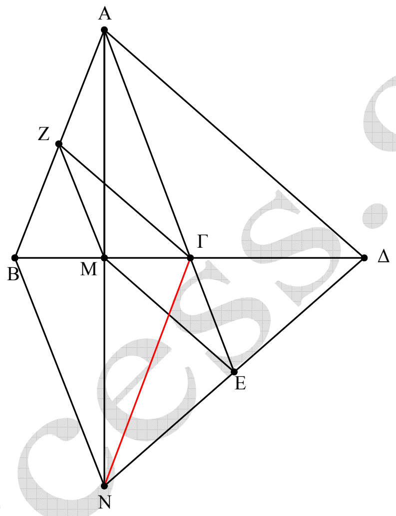
Επειδή το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές η διχοτόμος ΡΜ είναι μεσοκάθετος στην βάση του ΑΒ . Αφού λοιπόν τα ΓΔ και ΑΒ είναι κάθετα στην διχοτόμο ΡΜ θα είναι ΓΔ // ΑΒ

15.

Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με βάση ΒΓ και το ύψος του ΑΜ. Προεκτείνουμε το ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ = ΑΜ και τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΒΓ.

i) Να αποδείξετε ότι ΒΝ//ΑΓ
ii) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΝΔ
iii) Αν η προέκταση της ΑΓ τέμνει τη ΝΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΑΓ=2·ΓΕ
iv) Αν Ζ το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι:
α) ΓΖ = ΔΕ
β) Το ΓΕΜΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Προτεινόμενη λύση



i)
ΑΜ = ΜΝ και ΒΜ = ΜΓ

Άρα το ΑΒΝΓ παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιες του διχοτομούνται

οπότε ΒΝ //ΑΓ

ii)

η ΔΜ είναι μεσοκάθετος του ΑΝ άρα

ΔΑ = ΔΝ

iii)

Το Γ είναι μέσο του ΒΔ και ΓΕ // ΒΝ

Άρα Ε μέσο του ΔΝ και

$ΓΕ = \frac{ΒΝ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ οπότε ΑΓ = 2ΓΕ

iv)

α) Γ μέσο του ΒΔ και Ζ μέσο του ΑΒ $\Rightarrow$ $ΖΓ = \frac{ΑΔ}{2} \overset{(ii)}{=} \frac{ΔΝ}{2} = ΔΕ$

β) Μ , Ε μέσα των ΑΝ και ΝΔ $\Rightarrow$ $ΜΕ = // \frac{ΑΔ}{2}$ όμως και $ΖΓ = // \frac{ΑΔ}{2}$ άρα

ΜΕ = // ΖΓ $\Leftrightarrow$ ΓΕΜΖ παραλληλόγραμμο

16.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} < 90^o$ και Δ, Ε, Ζ, τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα στο εξωτερικό του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΚΛ και ΑΓΡΣ με κέντρα Ο και Τ αντίστοιχα . Να δείξετε ότι

i) $Z\hat{\Delta}E = B\hat{A}\Gamma$

ii) ΔΕ = ΖΟ

iii) $\Delta\hat{Z}O = \Delta\hat{E}T$

iv) Το τρίγωνο ΟΔΤ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

Προτεινόμενη λύση

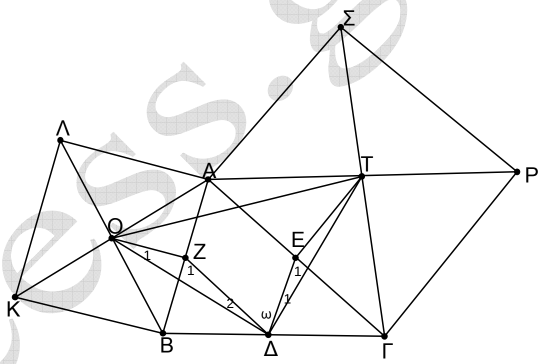
i)

Επειδή Δ, Ζ μέσα των ΒΓ και ΑΒ θα είναι

$\Delta Z =// \dfrac{A\Gamma}{2} = //AE$

άρα το ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο

οπότε $Z\hat{\Delta}E = B\hat{A}\Gamma$



ii)

Στο τρίγωνο ΑΒΛ τα Ο και Ζ είναι μέσα των ΛΒ και ΑΒ άρα $OZ = // \dfrac{A\Lambda}{2}$ και επειδή ΑΛ $\perp$ ΑΒ θα είναι και ΟΖ $\perp$ ΑΒ και επίσης $OZ = \dfrac{A\Lambda}{2} = \dfrac{AB}{2} = AZ$

Επειδή λοιπόν ΟΖ = ΑΖ και από το **(i)** ΔΕ = ΑΖ θα είναι και ΟΖ = ΔΕ

iii)

Αφού ΔΖ // ΑΓ θα είναι $\hat{Z}_1 = B\hat{A}\Gamma$ οπότε

$\Delta\hat{Z}O = \hat{Z}_1 + B\hat{Z}O = B\hat{A}\Gamma + 90^o$ και ομοίως $\Delta\hat{E}T = \hat{E}_1 + \Gamma\hat{E}T = B\hat{A}\Gamma + 90^o$

Άρα $\Delta\hat{Z}O = \Delta\hat{E}T$

iv)

Από το **(ii)** έχουμε ΔΕ = ΟΖ και ομοίως ΔΖ = ΕΤ και $\Delta\hat{Z}O = \Delta\hat{E}T$

άρα τα τρίγωνα ΟΖΔ και ΔΕΤ είναι ίσα οπότε ΟΔ = ΔΤ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{O}_1$

Στο τρίγωνο ΟΖΔ είναι $\hat{O}_1 + \Delta\hat{Z}O + \hat{\Delta}_2 = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + B\hat{A}\Gamma + 90^o + \hat{\Delta}_2 = 180^o \Leftrightarrow$

$\hat{\Delta}_1 + \hat{\omega} + \hat{\Delta}_2 = 90^o$ άρα $O\hat{\Delta}T = 90^o$ και επειδή ΟΔ = ΔΤ το τρίγωνο ΟΔΤ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

17.

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΓΔ . Αν Ο είναι το κέντρο του ορθογωνίου και Θ το σημείο τομής της ΑΜ με την ΒΔ τότε :

i) Να δείξτε ότι το Θ είναι κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΓΔ

ii) ΑΓ = 6 ΘΟ

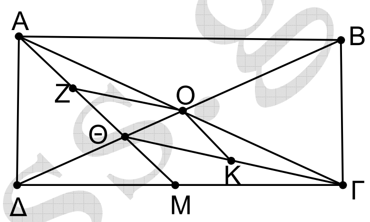
iii) Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΘ τότε ΖΟ // ΓΘ

iv) Αν Κ είναι το μέσο της ΓΘ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΟΚΘ είναι παραλληλόγραμμο

v) Τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΟΚΓ είναι ίσα

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή οι διαγώνιες του ορθογωνίου διχοτομούνται το Ο είναι μέσο της ΑΓ οπότε στο τρίγωνο ΑΔΓ οι ΑΜ και ΔΟ είναι διάμεσοι συνεπώς το Θ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου

ii)

Επειδή το Θ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΔΓ έχουμε

$ΘΟ = \frac{1}{3}ΔΟ = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ΔΒ = \frac{1}{6}ΔΒ$ άρα $ΔΒ = 6ΘΟ$

και επειδή στο ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες θα είναι και ΑΓ = 6ΘΟ

iii)

Τα Ζ και Ο είναι μέσα των ΑΘ και ΑΓ αντίστοιχα άρα ΖΟ // ΓΘ

iv)

Τα Ο και Κ είναι μέσα των ΑΓ και ΓΘ αντίστοιχα άρα ΟΚ // ΑΘ και επειδή στο **(iii)** είδαμε ότι και ΖΟ // ΓΘ το ΖΟΚΘ θα είναι παραλληλόγραμμο

v)

Από το παραλληλόγραμμο ΖΟΚΘ έχουμε ότι

ΖΟ = ΘΚ = ΚΓ και ΟΚ = ΖΘ = ΑΖ ακόμα είναι ΑΟ = ΟΓ οπότε τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΟΚΓ είναι ίσα αφού έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία .

18 .

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 60^o$. Αν οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ι να από δείξετε ότι

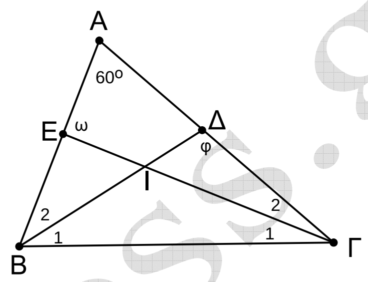
i) $B\hat{I}\Gamma = 120^o$

ii) $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}A$

iii) Το τετράπλευρο ΑΕΙΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Προτεινόμενη λύση

i)
Από το τρίγωνο ΒΙ Γ έχουμε ότι



$$B\hat{I}\Gamma = 180^o - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1 = 180^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$$

$$= 180^o - \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = 180^o - \frac{120^o}{2} = 120^o$$

$$\left(\begin{array}{l} 60^o + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow \\ \hat{B} + \hat{\Gamma} = 120^o \end{array}\right)$$

ii)

Η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ άρα

$B\hat{\Delta}\Gamma = 60^o + \hat{B}_2 = 60^o + \frac{\hat{B}}{2}$ **(1)**

Η γωνία $\Gamma\hat{E}A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΓ άρα

$$\Gamma\hat{E}A = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 = \hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \qquad \left(\frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2}\right)$$

$$= \hat{B} + 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} =$$

$$= \frac{\hat{B}}{2} + 90^o - 30^o = 60^o + \frac{\hat{B}}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Από τις **(1)** και **(2)** έχουμε ότι $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}A$

iii)

Επειδή $\hat{A} + E\hat{I}\Delta = 60^o + 120^o = 180^o$

το τετράπλευρο ΑΕΙΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο .

19.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) .Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ η δε ΜΝ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Κ και Λ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι

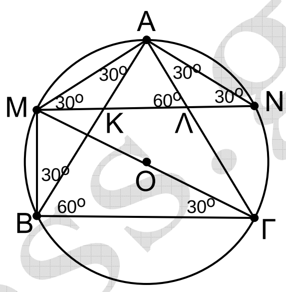
i) ΜΚ = ΚΛ = ΛΝ

ii) Το τετράπλευρο ΚΛΓΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

iv) ΜΓ = ΜΑ + ΜΒ

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο θα είναι

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Gamma} = 120^o$ και αφού τα Μ και Ν είναι μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ έχουμε

$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{N\Gamma} = 60^o$

οπότε όλες οι εγγεγραμμένες στα παραπάνω τόξα γωνίες θα είναι ίσες με 30^o η κάθε μία .

Προφανώς τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΛΝΑ είναι ίσα ισοσκελή και το ΑΚΛ είναι ισόπλευρο άρα ΜΚ = ΚΑ = ΚΛ = ΛΝ

ii)

Επειδή στο τετράπλευρο ΚΛΓΒ μία γωνία του η $K\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με την απέναντι εξωτερική της την $K\hat{\Lambda}A$ δεδομένου ότι είναι 60^o η κάθε μία, το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο

iii)

Στο τρίγωνο ΜΒΓ προφανώς $M\hat{B}\Gamma = 30^o + 60^o = 90^o$ και $B\hat{\Gamma}M = 30^o$ άρα η ΜΓ είναι διάμετρος του κύκλου και $MB = \dfrac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow M\Gamma = 2MB$ και επειδή ΜΒ = ΜΑ είναι ΜΓ = ΜΑ + ΜΒ

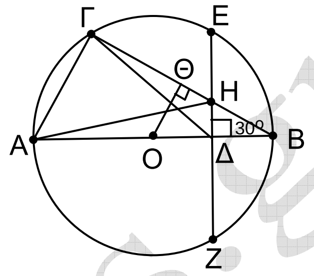
20.

Έστω κύκλος (O , R) και μία διάμετρος ΑΒ αυτού . Αν η χορδή ΒΓ σχηματίζει με την ΑΒ γωνία $A\hat{B}\Gamma = 30^o$ και η κάθετος της ακτίνας ΟΒ στο μέσο Δ αυτής τέμνει τον κύκλο στα Ζ και Ε και την ΒΓ στο Η να δείξτε ότι

i) ΖΕ = ΒΓ **ii)** $\Delta\hat{\Gamma}H = \Delta\hat{A}H$

Προτεινόμενη λύση

i)



Φέρω το απόστημα ΟΘ της χορδής ΒΓ τότε αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΘΒ είναι $\hat{B} = 30^o$ θα είναι $O\Theta = \frac{OB}{2} = O\Delta$ οπότε τα αποστήματα ΟΘ και ΟΔ των χορδών ΒΓ και ΕΖ αντίστοιχα είναι ίσα άρα ΒΓ = ΕΖ

ii)

Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος θα είναι $A\hat{\Gamma}B = 90^o$ οπότε στο τετράπλευρο ΑΓΗΔ έχουμε $A\hat{\Gamma}B + H\hat{\Delta}A = 90^o + 90^o = 180^o$ συνεπώς το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο επομένως $\Delta\hat{\Gamma}H = \Delta\hat{A}H$