$1^{η}$ Δεκάδα θεμάτων επανάληψης

1.

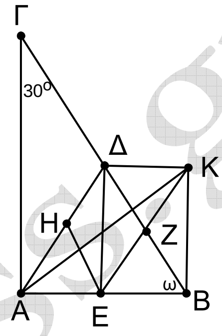
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα την ΒΓ και $\hat{Γ} = 30^{o}$. Έστω ΑΔ διάμεσος του ΑΒΓ και Ε , Ζ , Η τα μέσα των ΑΒ , ΒΔ και ΑΔ αντίστοιχα . Στην προέκταση του ΕΖ παίρνουμε τμήμα ΖΚ= ΕΖ . Να δείξετε ότι

i) Το ΒΕΔΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

ii) Το ΑΕΖΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

iii) Τα τμήματα ΑΚ και ΕΔ διχοτομούνται

iv) Το ΕΖΔΗ είναι ρόμβος



Προτεινόμενη λύση

i)

Ζ μέσο του ΒΔ $\Rightarrow$ ΒΖ = ΖΔ

τώρα

$$\left.\begin{matrix} ΒΖ = ΖΔ \\ ΕΖ = ΖΚ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ΔΚΒΕ \text{ παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιες του διχοτομούνται}$$

οπότε ΔΚ = //ΕΒ = // ΑΕ άρα και το ΔΚΕΑ είναι παραλληλόγραμμο συνεπώς ΑΔ = ΕΚ **(1)**

$$\left.\begin{matrix} Γ\hat{Α}Β = 90^{o} \\ ΑΔ \text{ διάμεσος στην υποτείνουσα } ΒΓ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ΑΔ = ΒΔ \ \mathbf{(2)}$$

από **(1)** , **(2)** $\Rightarrow$ ΕΚ = ΒΔ οπότε στο παραλληλόγραμμο ΒΕΔΚ οι διαγώνιες είναι ίσες άρα αυτό είναι ορθογώνιο

ii)

Αφού το ΔΚΕΑ είναι παραλληλόγραμμο το ΔΖΕΑ είναι τραπέζιο

Όμως $\hat{Γ} = 30^{o}$ άρα $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΔ$ επομένως και τα μισά τους ΔΖ και ΑΕ θα είναι ίσα άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές

iii)

Αφού το ΑΔΚΕ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του ΑΚ και ΔΕ διχοτομούνται

iv)

Αφού το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο και Ε , Η , Ζ είναι μέσα των πλευρών του θα είναι ΗΕ = ΔΗ = ΔΖ = ΖΕ επομένως το ΕΖΔΗ είναι ρόμβος

2.

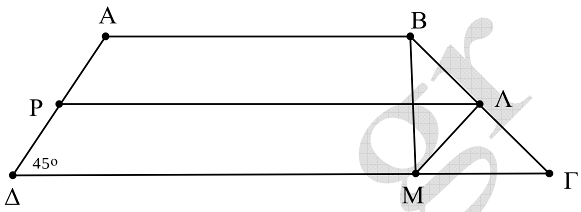
Από το μέσο Λ της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΔ η οποία τέμνει την ΔΓ στο Μ . Να δείξετε ότι

i) $ΒΜ \perp ΔΓ$

ii) Αν $\hat{Δ} = 45^o$ τότε $ΒΜ = \dfrac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Έστω Ρ το μέσο της ΑΔ τότε το ΡΛ είναι διάμεσος στο τραπέζιο άρα

ΡΛ // ΑΒ // ΔΓ και $ΡΛ = \dfrac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$

$\left.\begin{array}{l} ΡΛ \ // ΔΓ \\ ΛΜ // ΑΔ \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΡΛΜΔ παραλληλόγραμμο άρα ΡΛ = ΔΜ και $ΜΛ = ΡΔ = \dfrac{ΑΔ}{2}$

και επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές έχουμε ΑΔ = ΒΓ άρα $ΜΛ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

Τώρα στο τρίγωνο ΒΜΓ είναι η ΜΛ διάμεσος και $ΜΛ = \dfrac{ΒΓ}{2}$ άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ δηλαδή $ΒΜ \perp ΔΓ$

ii)

Αν $\hat{Δ} = 45^o$ τότε λόγω του ισοσκελούς τραπεζίου είναι και $\hat{Γ} = 45^o$ οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΜ θα είναι $Μ\hat{Β}Γ = 45^o$ άρα το τρίγωνο ισοσκελές συνεπώς

$ΒΜ = ΜΓ = ΔΓ - ΔΜ =$

$$= ΔΓ - ΡΛ = ΔΓ - \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2} = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$$

3.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ , Ε , Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ , ΓΑ , ΑΒ αντίστοιχα Στην προέκταση της ΖΕ παίρνουμε τμήμα ΕΚ= ΕΖ .

Να δείξετε ότι

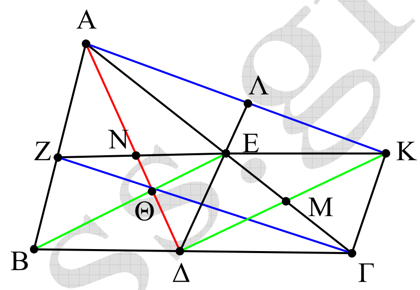
i) Το τρίγωνο ΑΔΚ έχει πλευρές ίσες με τις διαμέσους του ΑΒΓ

ii) Το Ε είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΔΚ

iii) Οι διάμεσοι του ΑΔΚ είναι ίσες με τα $\frac{3}{4}$ των πλευρών του ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση

i)



Προφανώς η πλευρά ΑΔ του τριγώνου ΑΔΚ είναι διάμεσος στο ΑΒΓ .

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ζ μέσο του ΑΒ}\\ \text{Ε μέσο του ΑΓ}\end{array}\right\}\Rightarrow ΖΕ=//\frac{ΒΓ}{2}\Leftrightarrow ΖΕ=//\,ΒΔ$$

και επειδή ΕΚ = ΖΕ θα είναι και ΕΚ= // ΒΔ άρα το ΕΚΔΒ είναι παραλληλόγραμμο επομένως ΔΚ = ΒΕ .

$$\left.\begin{array}{l}ΑΕ=ΕΓ\\ ΖΕ=ΖΚ\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ΑΖΓΚ είναι παραλληλόγραμμο άρα ΓΖ = ΑΚ}$$

ii)

Αφού ΕΚ= // ΔΓ το ΕΚΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιες του διχοτομούνται επομένως Μ μεσο του ΔΚ άρα η ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΔΚ

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ε μέσο του ΑΓ}\\ \text{Ε Ζ // ΔΓ}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Ν μέσο του ΑΔ δηλαδή η ΚΝ διάμεσος του τριγώνου ΑΔΚ}$$

οπότε , το σημείο τομής Ε των ΑΜ και ΚΝ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΚΔ

iii)

Είναι ΑΜ= ΑΕ + ΕΜ =

$$=\frac{ΑΓ}{2}+\frac{ΕΓ}{2}=\frac{ΑΓ}{2}+\frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2}=\frac{ΑΓ}{2}+\frac{ΑΓ}{4}=\frac{3ΑΓ}{4}$$

ΔΛ = ΔΕ + ΕΛ =

$$=\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΑΖ}{2}=\frac{ΑΒ}{2}+\frac{\frac{ΑΒ}{2}}{2}=\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΑΒ}{4}=\frac{3ΑΒ}{4}$$

και τέλος

ΚΝ= ΚΕ + ΕΝ =

$$= \frac{B\Gamma}{2} + \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2} + \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{2} + \frac{B\Gamma}{4} = \frac{3B\Gamma}{4}$$

4.

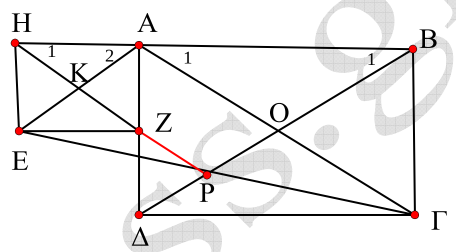
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ρ τυχαίο σημείο στην ΒΔ , προεκτείνουμε την ΓΡ κατά τμήμα ΡΕ = ΡΓ και φέρνουμε $EZ \perp A\Delta$ και $EH \perp AB$.

Να αποδείξετε ότι

i) ΕΑ // ΒΔ , **ii)** ΖΗ // ΑΓ , **iii)** τα σημεία Ζ , Η , Ρ είναι συνευθειακά .

Προτεινόμενη λύση

i)



Φέρω την διαγώνιο ΑΓ τότε

$$\left.\begin{array}{r} P \text{ μέσο του } \Gamma E \\ O \text{ μέσο του } A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow OP \,//\, AE$$

επομένως ΑΕ // ΒΔ

ii)

Το ΑΒΓΔ ορθογώνιο άρα ΟΑ = ΟΒ οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ **(1)**

Επίσης το ΗΑΖΕ ορθογώνιο άρα ΚΑ = ΚΗ $\Leftrightarrow$ $\widehat{H}_1 = \widehat{A}_2$ **(2)**

Από το **(i)** αφού ΑΕ // ΒΔ θα είναι $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$ **(3)**

Από τις **(1) , (2) , (3)** έχουμε ότι $\widehat{H}_1 = \widehat{A}_1$ άρα ΗΖ // ΑΓ

iii)

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ μέσο του } AE \\ HZ \,//\, A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow KZ \,//\, A\Gamma$$

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ μέσο του } AE \\ P \text{ μέσο του } E\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow PK \,//\, A\Gamma$$

Επειδή λοιπόν ΚΖ // ΑΓ και ΚΡ // ΑΓ με βάση το Ευκλείδειο αίτημα τα σημεία Κ , Ρ , Ζ θα είναι στην ίδια ευθεία στην οποία βρίσκεται και το Η άρα τα Η , Ζ , Ρ συνευθειακά .

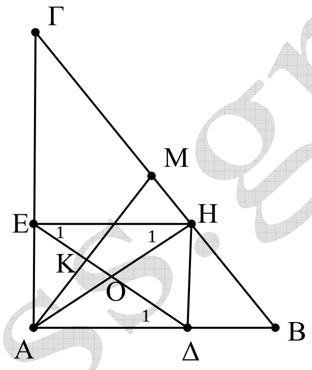
5.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσος στην υποτείνουσα ακόμα έστω ΑΗ το ύψος στην υποτείνουσα .Από το Η φέρνουμε ΗΔ⊥ΑΒ και ΗΕ⊥ΑΓ δείξτε ότι

i) $\Delta E = AH$ **ii)** $B\hat{A}M = A\hat{B}M$, $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Gamma}B$ **iii)** $AM \perp \Delta E$

Προτεινόμενη λύση

i)



ΗΔ ⊥ ΑΒ και ΗΕ ⊥ ΑΓ άρα $H\hat{\Delta}A = H\hat{E}A = 90^o$

ακόμα $\Gamma\hat{A}B = 90^o$ οπότε το ΗΔΑΕ είναι ορθογώνιο

συνεπώς ΔΕ = ΑΗ

ii)

$$\left.\begin{array}{r} A\overset{\triangle}{B}\Gamma \text{ ορθογώνιο} \\ \text{ΑΜ διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ΑΜ = ΜΒ άρα $B\hat{A}M = A\hat{B}M$

Στο ορθογώνιο ΗΔΑΕ το τρίγωνο ΟΗΕ είναι ισοσκελές άρα $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$ και επειδή ΕΗ // ΑΔ θα είναι $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ συνεπώς $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$ όμως

$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma}$ σαν οξείες με κάθετες πλευρές οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$ δηλαδή $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Gamma}B$

iii)

Βρήκαμε ότι

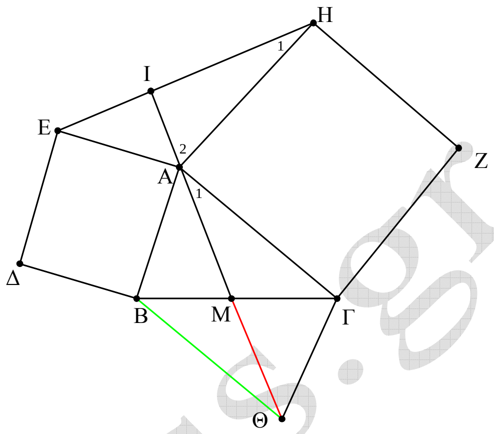
$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$ και $B\hat{A}M = A\hat{B}M$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$\hat{\Delta}_1 + B\hat{A}M = \hat{\Gamma} + A\hat{B}M = 90^o$ άρα και η τρίτη γωνία $\hat{K}$ του τριγώνου ΔΑΚ θα είναι ορθή οπότε $AM \perp \Delta E$

6.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΖΗ και ΑΒΔΕ . Αν ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ να δείξετε ότι η ΑΜ είναι κάθετη στην ΕΗ και ίση με το μισό της ΕΗ .

Προτεινόμενη λύση



Προεκτείνω την διάμεσο ΑΜ και στην προέκταση παίρνω τμήμα ΜΘ = ΑΜ τότε το ΑΓΘΒ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιες του διχοτομούνται άρα

$\Gamma\Theta = AB$ και $B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Theta = 180^o$

επίσης έχουμε ότι $B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}H = 180^o$

οπότε $A\hat{\Gamma}\Theta = E\hat{A}H$.

$$\left.\begin{array}{r} AE = AB = \Gamma\Theta \\ AH = A\Gamma \\ E\hat{A}H = A\hat{\Gamma}\Theta \end{array}\right\} \Rightarrow E\overset{\triangle}{A}H = A\overset{\triangle}{\Gamma}\Theta$$

άρα $A\Theta = EH \Leftrightarrow 2AM = EH \Leftrightarrow AM = \dfrac{EH}{2}$ και $\hat{A}_1 = \hat{H}_1$

Αν η προέκταση της ΜΑ τέμνει την ΕΗ στο Ι τότε

Η προφανής ισότητα $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$ γίνεται $\hat{A}_2 + \hat{H}_1 = 90^o$

Συνεπώς η τρίτη γωνία $\hat{I}$ του τριγώνου Α Ι Η θα είναι $\hat{I} = 90^o$

άρα η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη στη ΕΗ .

7.

Από το σημείο τομής Ι των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη στην ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα έστω ακόμα ότι $\widehat{A} = 70^o$

Δείξτε ότι

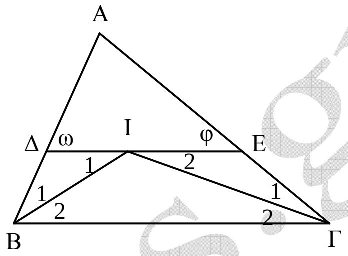
i) $\Delta E = \Delta B + E\Gamma$

ii) $B\hat{I}\Gamma = 125^o$

iii) $B\hat{\Delta}E + \Gamma\hat{E}\Delta = 2B\hat{I}\Gamma$

Προτεινόμενη λύση

i)



ΒΙ διχοτόμος $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$ **(1)**

$\Delta E \,//\, B\Gamma \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{B}_2$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_1 \Leftrightarrow \Delta B = I\Delta$

Ομοίως $E\Gamma = IE$

προσθέτοντας κατά μέλη $\Delta B + E\Gamma = I\Delta + IE = \Delta E$

ii)

Από γνωστή εφαρμογή $B\hat{I}\Gamma = 90^o + \dfrac{\widehat{A}}{2} = 90^o + 35^o = 125^o$

iii)

$B\hat{\Delta}E = 180^o - \hat{\omega}$ και $\Gamma\hat{E}\Delta = 180^o - \hat{\varphi}$ άρα

$B\hat{\Delta}E + \Gamma\hat{E}\Delta = 360^o - (\hat{\omega} + \hat{\varphi}) = 360^o - (180^o - \widehat{A}) =$

$= 360^o - 110^o = 250^o = 2B\hat{I}\Gamma$

8.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ , ΑΗ η διάμεσος και το ύψος που αντιστοιχούν στην πλευρά ΒΓ . Προεκτείνουμε τις ΑΜ και ΑΗ έτσι ώστε ΑΜ = ΜΔ και ΑΗ = ΗΕ .

Να αποδείξετε ότι

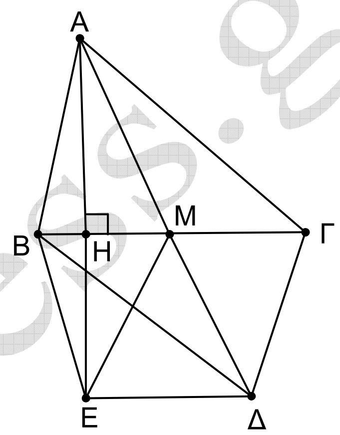
i) Το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι παραλληλόγραμμο

ii) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ορθογώνιο

iii) $\mathrm{H}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$

iv) ΒΕ = ΔΓ

Προτεινόμενη λύση



i)

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta} \\ \mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma\Delta B} \text{ παραλληλόγραμμο}$$

διότι οι διαγώνιες του διχοτομούνται

ii)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η μέσο του ΑΕ} \\ \text{Μ μέσο του ΑΔ}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{HM} \parallel \mathrm{E\Delta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{HM} \parallel \mathrm{E\Delta} \\ \mathrm{MH} \perp \mathrm{AE}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{AE} \text{ άρα } \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{\Delta} = 90^{o}$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ορθογώνιο

iii)

$$\left.\begin{array}{r}\overset{\triangle}{\mathrm{AE\Delta}} \text{ ορθογώνιο} \\ \text{ΕΜ διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΔ}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{EM} = \mathrm{MA} \Leftrightarrow \mathrm{H}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$$

iv)

Από το παραλληλόγραμμο ΑΓΔΒ έχουμε ότι ΔΓ = ΑΒ **(1)**

επειδή ΒΗ μεσοκάθετος του ΑΕ θα είναι και ΑΒ = ΒΕ **(2)** .

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι ΔΓ = ΒΕ

9.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο . Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε $Μ\Delta \perp ΑΓ$ που τέμνει τον κύκλο στα Ζ και Η και $ΜΕ \perp ΑΒ$ που τέμνει τον κύκλο στα Λ και Κ , με τα Κ και Η προς το ίδιο μέρος της ΒΓ

Να δείξετε ότι

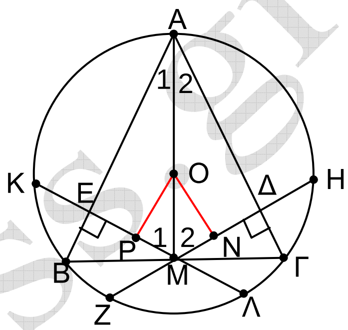
i) Τα σημεία Α , Ο , Μ είναι συνευθειακά

ii) ΖΗ = ΚΛ

iii) ΚΕ = ΔΗ

Προτεινόμενη λύση

i)



Αφού το Μ είναι το μέσο της ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ θα είναι μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ επομένως θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου δηλαδή τα σημεία Α , Ο , Μ είναι συνευθειακά

ii)

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΜ και ΑΔΜ είναι ίσα διότι έχουν την ΑΜ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ άρα $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $K\widehat{M}H$ οπότε οι αποστάσεις ΟΡ και ΟΝ του Ο από τις πλευρές ΚΜ και ΜΗ της γωνίας $K\widehat{M}H$ είναι ίσες .

Οι αποστάσεις όμως ΟΡ και ΟΝ είναι τα αποστήματα των χορδών ΚΛ και ΖΗ και αφού τα αποστήματα είναι ίσα οι χορδές θα είναι και αυτές ίσες δηλαδή ΖΗ = ΚΛ

iii)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΜΕ και ΜΔΓ έχουν ΒΜ = ΜΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα αυτά είναι ίσα οπότε ΜΕ = ΜΔ **(1)**

Επίσης τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΡΜ και ΟΜΝ είναι ίσα αφού έχουν την ΟΜ κοινή και $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ άρα ΜΡ = ΜΝ **(2)**

Αφαιρώντας κατά μέλη από την **(1)** την **(2)** βρίσκουμε ότι ΕΡ = ΝΔ **(3)**

Επειδή λοιπόν ΖΗ = ΚΛ θα είναι και τα μισά τους ίσα δηλαδή ΚΡ = ΝΗ και λόγω της **(3)** έχουμε και ΚΕ = ΔΗ .

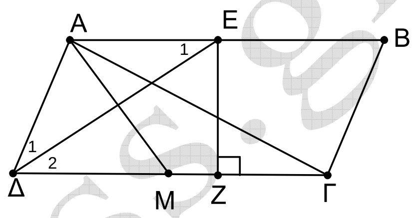
10.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120^o$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε και Μ είναι το μέσο της ΔΓ, τότε :

i) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta}$ και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές
ii) Να δείξετε ότι ΑΒ = 2ΑΔ
iii) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισόπλευρο
iv) Να δείξετε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$
v) Αν $ΕΖ \perp ΔΓ$ να αποδείξετε ότι ΔΕ = 2ΕΖ

Προτεινόμενη λύση

i)



Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι γωνίες

$\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι διαδοχικές άρα

$\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^o$

Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$

$AB \,//\, \Delta\Gamma \Rightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$

άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΕ

ii)

Το Ε είναι μέσο του ΑΒ άρα $AB = 2AE \overset{(i)}{=} 2A\Delta$

iii)

Επειδή ΑΕ = ΔΜ ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΔΓ και ΑΔ = ΑΕ θα είναι ΑΔ = ΔΜ δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές και η γωνία $\hat{\Delta}$ αυτού είναι $\hat{\Delta} = 60^o$ άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο

iv)

Στο τρίγωνο ΔΑΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και λόγω του **(iii)** $AM = \Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2}$

συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΓ

v)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ η γωνία $\hat{\Delta}_2 = 30^o$ άρα $EZ = \frac{E\Delta}{2} \Leftrightarrow E\Delta = 2EZ$