2.9
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 285 – 286

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Λύση

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2) = 0$ και $x-2<0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

1.ii)

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Λύση

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\left(\eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \eta\mu x \cdot \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \eta\mu x = -1$ και $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$

(1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, άρα η ευθεία $x = -\dfrac{\pi}{2}$ είναι κατ. ασύμπτωτη της C_f

Ομοίως $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, άρα η ευθεία $x = \dfrac{\pi}{2}$ είναι κατ. ασύμπτωτη της C_f

1.iii)

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

Λύση

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = 1-2 = -1$$

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

netsuccess.gr

1.iv)

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Λύση

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

2.i)

Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

Λύση

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

netsuccess.gr

2.ii)

Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

Λύση

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)\right) = (+\infty\cdot 2) = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

netsuccess.gr

3.i)

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

Λύση

$D_f = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} [\, f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x - 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x - 1} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
Ομοίως, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to1^-} (x^2 - x - 2) \lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -2\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to1^+} (x^2 - x - 2) \lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -2\cdot(+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

3.ii)

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Λύση

$D_f = (-\infty,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 3}{x - 2} = 2$$

Άρα η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
Ομοίως, η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \lim_{x\to2^-} (x^2 - 3) \lim_{x\to2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = 1\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \lim_{x\to2^+} (x^2 - 3) \lim_{x\to2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = 1\cdot(+\infty) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

netsuccess.gr

3.iii)

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

Λύση

Πρέπει $x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$ ή $x \ge 0$, άρα $D_f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = -\sqrt{1+0} = -1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x} + x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία $y = -x - \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Ομοίως, η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη , αφού είναι συνεχής στο -1 και στο 0.

netsuccess.gr

4.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x^2}{x^4}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{[\ln(x+1)]'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{1}{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x] = 1$$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x^2}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x^2)'}{(x^4)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2\cdot 2x}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{0}{1} = 0$$

netsuccess.gr

Β΄ Ομάδας

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες $\varepsilon_1:\ y = -x-1$ και $\varepsilon_2:\ y = x+1$. Να αποδείξετε ότι

i) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+2x+2 > (x+1)^2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

Λύση

i)

Με τον ορισμό της ασύμπτωτης, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)] = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+(x+1)] = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+(x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{[\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)]\,[\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)]}{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2-2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x-1}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x+1}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$$

$$= 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0+0}+1+0} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$

ii)

$x^2 + 2x + 2 > (x+1)^2 \iff x^2 + 2x + 2 > x^2 + 2x + 1$

$2 > 1$ που ισχύει

Κοντά στο $-\infty$, για να βρίσκεται η C_f πάνω από την ε_1, αρκεί

$$\sqrt{x^2+2x+2} > -x-1$$

$$\sqrt{x^2+2x+2} > -(x+1)$$

$$\sqrt{x^2+2x+2} > |x+1|$$

$$(\sqrt{x^2+2x+2})^2 > |x+1|^2$$

$x^2 + 2x + 2 > (x+1)^2$ που αποδείχθηκε

Κοντά στο $+\infty$, για να βρίσκεται η C_f πάνω από την ε_2, αρκεί

$$\sqrt{x^2+2x+2} > x+1$$

$$\sqrt{x^2+2x+2} > |x+1|$$

$$(\sqrt{x^2+2x+2})^2 > |x+1|^2$$

$x^2 + 2x + 2 > (x+1)^2$ που αποδείχθηκε

netsuccess.gr

2.i)

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$ και συνεχής σ' αυτό.

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\ 2^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2^x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \,.\, \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\ 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(2^x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x \ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{\ln 2} \cdot 0 = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [\, f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(2^x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x \ln 2}$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \frac{2}{\ln 2} \cdot \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(2^x)'}$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x \ln 2}$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot 0 = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

netsuccess.gr

2.ii)

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Λύση

$D_f = (0, +\infty)$ και συνεχής σ'αυτό.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (\ln x) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [\, f(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

netsuccess.gr

3.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \alpha, & x \le 0 \\ e^{\beta x}, & x > 0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Κατ' αρχήν θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο 0.

Δηλαδή θα πρέπει $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} (\eta\mu x + \alpha) = \lim_{x \to 0^+} e^{\beta x} = \eta\mu 0 + \alpha$$

$$\eta\mu 0 + \alpha = e^{\beta \cdot 0} = \alpha$$

$$\alpha = 1$$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & x \le 0 \\ e^{\beta x}, & x > 0 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

Και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\beta x} - 1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(e^{\beta x} - 1)'}{x'} = \lim_{x \to 0^+} (e^{\beta x} \beta) = 1 \cdot \beta = \beta$$

f παραγωγίσιμη στο $0 \iff \beta = 1$

netsuccess.gr

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -1 \quad , & x = 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι :

i) η f είναι συνεχής **ii)** $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

Λύση

i)

Για $0 < x \neq 1$ η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{-1} = -1, \quad \text{αλλά και} \quad f(1) = -1,$$

οπότε f συνεχής και στο 1

ii)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x\ln x+1-x}{1-x}}{x-1}$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{[x\ln x+1-x]'}{[(x-1)^2]'}$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{2(x-1)}$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2(x-1)}$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{[2(x-1)]'}$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

netsuccess.gr

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1+\dfrac{\ln x}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι :

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, ενώ

ii) Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{[\ln(x^2-2x+2)]'}{(x-1)'}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)}{1} = \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} = \frac{0}{1} = 0 = f(1)$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο 1

$$f'(1) = \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} - 0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{[\ln(x^2-2x+2)]'}{[(x-1)^2]'}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{1} = 1$$

ii)

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} \left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1 + \frac{0}{1} = 1$$

$$g(1) = 1^2 = 1$$

Άρα g συνεχής στο 1

$$\lim_{x\to1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to1^-} (x+1) = 2$$

netsuccess.gr

$$\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{1+\frac{\ln x}{x}-1^2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1} = 1\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= 1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x} = 1 \neq 2$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ (1-e^{-x})\ln x, & x\in(0,\ 1) \end{cases}$

i) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}$ και $\lim_{x\to0} x\ln x$

ii) Ν αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Λύση

i)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0}\frac{(1-e^{-x})'}{x'} = \lim_{x\to0}\frac{e^{-x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to0} x\ln x = 0(+\infty) = \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}(-x) = 0$$

ii)

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}(1-e^{-x})\ln x = \lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}(x\ln x)$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\lim_{x\to0} x\ln x$$
$$= 1\cdot 0 = 0 = f(0)$$

netsuccess.gr