2.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 249 – 250

Α΄ Ομάδας

1.i
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0 , 2]$, και αν ναι στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha , \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

f συνεχής στο $[0 , 2]$
παραγωγίσιμη στο $(0 , 2)$
$f(0) = 1 = f(2)$

Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Είναι $f'(x) = 2x - 2$

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 2 = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$

1.ii
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = ημ3x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, και αν ναι, στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha , \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

f συνεχής στο $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$
παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f(0) = 0 = f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Είναι $f'(x) = 3συν3x$
$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3συν3\xi = 0 \Leftrightarrow συν3\xi = 0$

και επειδή $0 < \xi < \frac{2\pi}{3}$ δηλαδή $0 < 3\xi < 2\pi$, θα είναι $3\xi = \frac{\pi}{2}$ ή $3\xi = \frac{3\pi}{2}$

άρα $\xi = \frac{\pi}{6}$ ή $\xi = \frac{\pi}{2}$

1.iii

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = 1 + συν2x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, π]$, και αν ναι , στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $ξ \in (α , β)$ για τα οποία ισχύει $f'(ξ) = 0$.

Λύση

f συνεχής στο $[0 , π]$
παραγωγίσιμη στο $(0 , π)$
$f(0) = 2 = f(π)$

Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (α , β)$ τέτοιο , ώστε $f'(ξ) = 0$.

Είναι $f'(x) = -2ημ2x$

$f'(ξ) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2ημ2ξ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ημ2ξ = 0$

και επειδή $0 < ξ < π$ δηλαδή $0 < 2ξ < 2π$, θα είναι $2ξ = π$ άρα $ξ = \frac{π}{2}$

1.iv

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x|$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1 , 1]$ και αν ναι στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $ξ \in (α , β)$ για τα οποία ισχύει $f'(ξ) = 0$.

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} -x , & x < 0 \\ x , & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 , επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη και στο διάστημα $[-1 , 1]$, άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1 , 1]$

2.i

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0 , 4]$ και αν ναι στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (0 , 4)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Λύση

f συνεχής στο $[0 , 4]$

παραγωγίσιμη στο $(0 , 4)$

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0 , 4)$ τέτοιο ,ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \dfrac{24 - 0}{4} = 6$

Είναι $f'(x) = 2x + 2$

$f'(\xi) = 6 \iff 2\xi + 2 = 6 \iff 2\xi = 4 \iff \xi = 2$

2.ii

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu 2x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και αν ναι , στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (0 , \frac{\pi}{2})$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}$

Λύση

f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, από Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο , ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}$

$$= \dfrac{3\eta\mu\pi - 3\eta\mu 0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Είναι $f'(x) = 6\sigma\upsilon\nu 2x$

$f'(\xi) = 0 \iff 6\sigma\upsilon\nu 2\xi = 0 \iff \sigma\upsilon\nu 2\xi = 0$

και επειδή $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $0 < 2\xi < \pi$, παίρνουμε $2\xi = \frac{\pi}{2}$ άρα $\xi = \frac{\pi}{4}$

2.iii

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+2\,, & x \le -1 \\ x^3-x\,, & x > -1 \end{cases}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-3\,,2]$ και αν ναι στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (-3\,,2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-3\,,-1)$, αφού $f(x) = 2x + 2$ **(1)**

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-1\,,2]$, αφού $f(x) = x^3 - x$ **(2)**

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x+2) = 2(-1)+2 = 0 \quad \textbf{(3)}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3-x) = (-1)^3-(-1) = -1+1 = 0 \quad \textbf{(4)}$$

$$f(-1) = 2\cdot(-1)+2 = -2+2 = 0 \quad \textbf{(5)}$$

Από τις (3), (4), (5) $\Rightarrow$ f συνεχής στο -1 **(6)**

Από τις (1), (2), (6) $\Rightarrow$ f συνεχής στο διάστημα $[-3\,,2]$ **(7)**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3\,,-1)$,

αφού $f(x) = 2x+2$, με $f'(x) = 2$ **(1΄)**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1\,,2)$,

αφού $f(x) = x^3 - x$, με $f'(x) = 3x^2 - 1$ **(2΄)**

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+2-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} 2 = 2 \quad \textbf{(3΄)}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-x-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x(x^2-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^+} [x(x-1)] = (-1)(-1-1) = 2 \quad \textbf{(4΄)}$$

Από τις (3΄), (4΄) f παραγωγίσιμη στο -1 με $f'(-1) = 2$ **(5΄)**

Από τις (1΄), (2΄), (5΄) $\Rightarrow$ f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3\,,2)$ **(6΄)**

Από τις (7), (6΄) ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi \in (-3\,,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \dfrac{(2^3-2)-[2(-3)+2]}{2+3} = \dfrac{10}{5} = 2$

- Από την $(5΄)$ είναι $f'(-1) = 2$, άρα ζητούμενος ξ είναι ο -1
- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 2$ στο διάστημα $(-3, -1)$

$f'(x) = 2 \overset{(1΄)}{\Leftrightarrow} 2 = 2$ για κάθε x, άρα ζητούμενος ξ είναι κάθε $\xi \in (-3, -1)$

- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 2$ στο διάστημα $(-1, 2)$

$$f'(x) = 2 \overset{(2΄)}{\Leftrightarrow} 3x^2 - 1 = 2$$

$$3x^2 = 3$$

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, άρα ζητούμενος ξ είναι ο 1

3.

Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι **:**

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\alpha}$$

Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0 < \alpha < \beta$

Λύση

f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
f παραγωγίσιμη στο (α, β) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Από το Θ.Μ.Τ, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Αλλά $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(\xi) = e^{\xi}$, οπότε $e^{\xi} = \dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$ **(1)**

$$\alpha < \xi < \beta \Rightarrow e^{\alpha} < e^{\xi} < e^{\beta} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta}$$

g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, αφού είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
g παραγωγίσιμη στο (α, β) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

Από το Θ.Μ.Τ, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Αλλά $g'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow g'(\xi) = \dfrac{1}{\xi}$, οπότε $\dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}$ **(2)**

$$0 < \alpha < \xi < \beta \Rightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\alpha}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,\ 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0,\ 1)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,\ 1)$

Λύση

i)

f συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι πολυωνυμική

$f(-1) = (-1)^4 - 20(-1)^3 - 25(-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 20 - 25 + 1 + 1 = -2$

$f(0) = 1$

Άρα $f(-1)\,f(0) = -2 < 0$

Επομένως, κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ_1 στο διάστημα $(-1,\ 0)$

Ομοίως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ_2 στο διάστημα $(0,\ 1)$

ii)

Είναι $f'(x) = 4x^3 - 60x^2 - 50x - 1$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε, ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ξ_1, ξ_2).

f συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$
f παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)
$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

Rolle $\Rightarrow$ η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ξ_1, ξ_2)

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)ημx$. Να αποδείξετε ότι **:**

i) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$

ii) Η εξίσωση $εφx = 1 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$

Λύση

i)

f συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ σα γινόμενο συνεχών

f παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ σα γινόμενο παραγωγίσιμων

$f(0) = (0 - 1)ημ0 = -1 \cdot 0 = 0$ και $f(1) = (1 - 1)ημ1 = 0 \cdot ημ1 = 0$

Rolle $\Rightarrow$ η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $ξ \in (0, 1)$

ii)

Είναι $f'(x) = ημx + (x - 1)συνx$

Για κάθε $x \in (0, 1)$, η εξίσωση $εφx = 1 - x$ γράφεται

$$\frac{ημx}{συνx} = 1 - x$$

$$ημx = (1 - x)συνx$$

$$ημx + (x - 1)συνx = 0$$

$f'(x) = 0$, η οποία, από το (i), έχει μία τουλάχιστον ρίζα $ξ \in (0, 1)$

3.

i) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημ\dfrac{x}{2} = x$ αληθεύει μόνο για $x = 0$

Λύση

i)

Η εξίσωση $f(x) = x$ γράφεται $f(x) - x = 0$.

Θέτουμε $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε $g'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$. **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα .

Έστω ότι έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 , x_2 .

g συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)
$g(x_1) = g(x_2) = 0$

Rolle $\Rightarrow$ η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) , που είναι άτοπο από την (1)

ii)

Η εξίσωση $ημ\dfrac{x}{2} = x$ αληθεύει για $x = 0$, αφού $ημ\dfrac{0}{2} = 0$

Θέτουμε $f(x) = ημ\dfrac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ Τότε $f'(x) = \dfrac{1}{2}συν\dfrac{x}{2}$

Είναι $f'(x) \neq 1$,

διότι , αν ήταν $f'(x) = 1$ τότε

$$\frac{1}{2}συν\frac{x}{2} = 1 \text{ δηλαδή } συν\frac{x}{2} = 2 \text{ που είναι άτοπο .}$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του ερωτήματος (i), άρα η εξίσωση $ημ\dfrac{x}{2} = x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα , που είναι η $x = 0$.

4.

i) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,

να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

Λύση

i)

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|1+x^2|} \le \frac{1}{2}$$

$$2|x| \le |1+x^2|$$

$$2|x| \le 1 + x^2$$

$$0 \le |x|^2 - 2|x| + 1 \Leftrightarrow 0 \le (|x| - 1)^2$$ που ισχύει

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|} \le \dfrac{1}{2}$

ή ότι $\left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \le \dfrac{1}{2}$

Δε βλάπτεται η γενικότητα θεωρώντας $\alpha < \beta$

f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), με Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$

$$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \quad \textbf{(1)}$$

Η υπόθεση $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \Rightarrow |f'(x)| = \left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \overset{(i)}{\le} \dfrac{1}{2}$ και για $x = \xi$

$$|f'(\xi)| \le \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \le \frac{1}{2}$$

5.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και ισχύει $2 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (0, 4)$. Αν $f(0) = 1$ να αποδείξετε ότι $9 \le f(4) \le 21$

Λύση

f συνεχής στο $[0, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$, με το Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$

υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(4)-f(0)}{4-0} = \dfrac{f(4)-1}{4}$ **(1)**

Η υπόθεση $2 \le f'(x) \le 5$ για $x = \xi$ γίνεται $2 \le f'(\xi) \le 5 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$2 \le \frac{f(4)-1}{4} \le 5$$
$$8 \le f(4) - 1 \le 20$$
$$9 \le f(4) \le 21$$

6.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και ισχύει $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

Λύση

f συνεχής στο $[-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$, με το Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$

υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}$

$$= \frac{f(0)-(-1)}{1}$$
$$= f(0) + 1$$

Επειδή όμως $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, θα είναι και $f'(\xi) \le 1$

Άρα $f(0) + 1 \le 1 \Rightarrow f(0) \le 0$ **(1)**

f συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, με το Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$

υπάρχει $\eta \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\eta) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1 - f(0)$

Επειδή όμως $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, θα είναι και $f'(\eta) \le 1$

Άρα $1 - f(0) \le 1 \Rightarrow f(0) \ge 0$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow f(0) = 0$

7.

Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία τα $A(0, 1)$, $B(1, 2)$

Λύση

Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = 2^x - (-x^2 + 2x + 1)$

$h(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

άρα $h'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$ και $h''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **(1)**

Είναι $h(0) = 2^0 + 0^2 - 2.0 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ το A είναι κοινό σημείο

και $h(1) = 2^1 + 1^2 - 2.1 - 1 = 2 + 1 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow$ το B είναι κοινό σημείο

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι οι C_f, C_g έχουν και τρίτο κοινό σημείο $\Gamma(\rho, \sigma)$ και, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, ας υποθέσουμε ότι $\rho >$ των 0 και 1.

Τότε $f(\rho) = g(\rho) = \sigma$, άρα $h(\rho) = 0$

Για την h, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[0, 1]$, άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, στο διάστημα $[1, \rho]$, υπάρχει $\xi_2 \in (1, \rho)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2) = 0$

Για την h', ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $h''(\xi) = 0$ που είναι άτοπο από την (1)

Άρα οι C_f, C_g δε μπορούν να έχουν και τρίτο κοινό σημείο