2.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 227 – 229

Α΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_o όταν :

i) $f(x) = x^4$, $x_o = -1$ **ii)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x_o = 9$

iii) $f(x) = συνx$, $x_o = \frac{\pi}{6}$ **iv)** $f(x) = \ln x$, $x_o = e$

v) $f(x) = e^x$, $x_o = \ln 2$

Λύση

i)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$

ii)

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

iii)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -ημx \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -ημ\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

iv)

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$

v)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$

2.i)

Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ \sqrt{x}, & x\geq 1 \end{cases}$

Λύση

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις (1) , (2) συμπεραίνουμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο $x_o=1$

2.ii)

Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} \etaμx, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$

Λύση

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=(ημx)'=συνx$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=(x)'=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ημx-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ημx}{x}=1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}1=1 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις (1) , (2) συμπεραίνουμε ότι $f'(0)=1$

2.iii)

Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^3\ , & x<2 \\ x^4\ , & x\geq 2 \end{cases}$

Λύση

Για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)=(x^3)'=3x^2$

Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)=(x^4)'=4x^3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^3 = 2^3 = 8$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^4 = 2^4 = 16$ **(2)**

Από τις (1) , (2) συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 2 , άρα δεν παραγωγίζεται σ'αυτό.

2.iv)

Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2\ , & x\leq \frac{2}{3} \\ x^3\ , & x> \frac{2}{3} \end{cases}$

Λύση

Για κάθε $x<\frac{2}{3}$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$

Για κάθε $x>\frac{2}{3}$ είναι $f'(x)=(x^3)'=3x^2$

$\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^-} x^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^+} x^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ **(2)**

Από τις (1) , (2) συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\frac{2}{3}$, άρα δεν παραγωγίζεται σ'αυτό.

3.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$;

Λύση

Έστω $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ Τότε $g'(x) = 2x$

Έστω τα σημεία $M_1(x_1, g(x_1))$, $M_2(x_2, g(x_2))$ με $x_1 \neq x_2$ και ε_1, ε_2 οι εφαπτόμενες της C_g σε αυτά αντίστοιχα.

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \iff g'(x_1) = g'(x_2)$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$ που είναι άτοπο

Άρα δεν υπάρχουν παράλληλες εφαπτόμενες της C_g

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$

Έστω τα σημεία $N_1(x_1, f(x_1))$, $N_2(x_2, f(x_2))$ με $x_1 \neq x_2$ και η_1, η_2 οι εφαπτόμενες της C_f σε αυτά αντίστοιχα.

$\eta_1 \parallel \eta_2 \iff f'(x_1) = f'(x_2)$

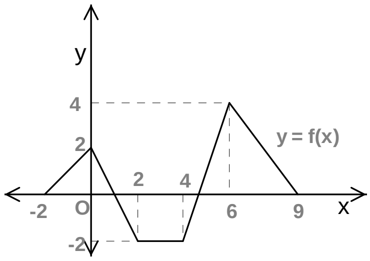
$3x_1^2 = 3x_2^2$

$x_1^2 = x_2^2 \iff x_1 = -x_2$ (αφού $x_1 \neq x_2$)

Υπάρχουν , λοιπόν , τέτοια σημεία και είναι εκείνα που έχουν αντίθετες τετμημένες

4.

Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



Λύση

Στο διάστημα (–2 , 0) η κλίση είναι $f'(x) = \frac{0-2}{-2-0} = 1$

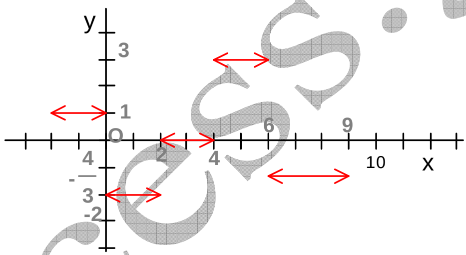
Στο διάστημα (0 , 2) η κλίση είναι $f'(x) = \frac{-2-2}{2-0} = -2$

Στο διάστημα (2 , 4) η κλίση είναι $f'(x) = 0$

Στο διάστημα (4 , 6) η κλίση είναι $f'(x) = \frac{4-(-2)}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$

Στο διάστημα (6 , 9) η κλίση είναι $f'(x) = \frac{0-4}{9-6} = -\frac{4}{3}$

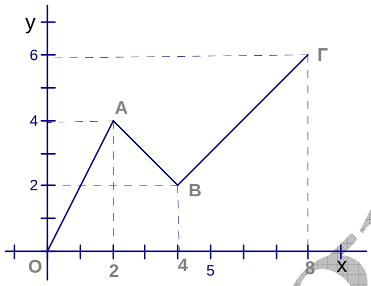
Γραφική παράσταση της f′



5.

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,\ 8]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$ και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα.

Λύση



Στο διάστημα $(0\ ,\ 2)$ η κλίση είναι $f'(x)=2$.

Άρα η C_f είναι το ευθ. τμήμα ΟΑ

Στο διάστημα $(2\ ,\ 4)$ η κλίση είναι $f'(x)=-1$.

Άρα η C_f είναι το ευθ. τμήμα ΑΒ

Στο διάστημα $(4\ ,84)$ η κλίση είναι $f'(x)=1$. Άρα η C_f είναι το ευθ. τμήμα ΒΓ

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τις τιμές των α , β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x \ , & x < \pi \\ \alpha x + \beta \ , & x \geq \pi \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = \pi$

Λύση

Για να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = \pi$, θα πρέπει , κατ’αρχήν να είναι συνεχής .

Άρα $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to \pi^-} \eta\mu x = \lim\limits_{x \to \pi^+} (\alpha x + \beta) = \alpha\pi + \beta \Leftrightarrow$

$\eta\mu\pi = \alpha\pi + \beta \Leftrightarrow 0 = \alpha\pi + \beta \Leftrightarrow \beta = -\alpha\pi$ **(1)**

f παραγωγίσιμη στο $x_o = \pi \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\eta\mu x - (\alpha\pi + \beta)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\alpha x + \beta - (\alpha\pi + \beta)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\eta\mu x}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\alpha(x - \pi)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x - \pi \to 0^-} \frac{-\eta\mu(x - \pi)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi^+} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \alpha$$

Η (1) $\Leftrightarrow \beta = \pi$

2.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi , f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi , f(\xi))$ και $B(-\xi , 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

Λύση

$D_f = [0 , +\infty)$

Για να ορίζεται η τιμή $f(\xi) = \sqrt{\xi}$, πρέπει $\xi \in D_f$ και επειδή $\xi \neq 0$, πρέπει $\xi > 0$

Είναι . $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$

Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο A έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

$$y - \sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x - \xi)$$

Οι συντεταγμένες του $B(-\xi , 0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε αφού

$0 - \sqrt{\xi} = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}(-\xi - \xi) \Leftrightarrow -\sqrt{\xi} = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}(-2\xi) \Leftrightarrow -\sqrt{\xi} = -\sqrt{\xi}$ που ισχύει.

Άρα η ευθεία ε συμπίπτει με την ευθεία AB.

3.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) = 3\alpha^2$

Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο Α έχει εξίσωση $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

$$y - \alpha^3 = 3\alpha^2(x-\alpha)$$
$$y = 3\alpha^2 x - 3\alpha^3 + \alpha^3$$
$$y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f, ε, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=3\alpha^2 x-2\alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x^3=3\alpha^2 x-2\alpha^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ x^3-\alpha^2 x-2\alpha^2 x+2\alpha^3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ x(x^2-\alpha^2)-2\alpha^2(x-\alpha)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ x(x-\alpha)(x+\alpha)-2\alpha^2(x-\alpha)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ (x-\alpha)[x(x+\alpha)-2\alpha^2]=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ x-\alpha=0 \quad ή \quad x^2+\alpha x-2\alpha^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ x=\alpha \quad ή \quad x=\alpha \quad ή \quad x=-2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\alpha^3 \\ x=\alpha \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = -8\alpha^3 \\ x = -2\alpha \end{cases} \qquad \text{Άρα } N(-2\alpha\,,\,-8\alpha^3)$$

$f'(-2\alpha) = 3(-2\alpha)^2 = 12\alpha^2 = 4\cdot 3\alpha^2 = 4f'(\alpha)$

4.

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\ \dfrac{1}{\xi}\right)$. Αν $A,\ B$ είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

i) Το M είναι μέσο του AB

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό , δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi\in\mathbb{R}^*$

Λύση

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{\frac{\xi-x}{\xi x}}{x-\xi}=-\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\xi x}=-\frac{1}{\xi^2}$$

$\varepsilon:$ $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \iff y-\dfrac{1}{\xi}=-\dfrac{1}{\xi^2}(x-\xi)$

Για $y=0$ παίρνουμε $-\dfrac{1}{\xi}=-\dfrac{1}{\xi^2}(x-\xi) \iff \xi=x-\xi \iff x=2\xi$

Άρα $A(2\xi\ ,\ 0)$

Για $x=0$ παίρνουμε $y-\dfrac{1}{\xi}=-\dfrac{1}{\xi^2}(0-\xi) \iff y-\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{\xi} \iff y=\dfrac{2}{\xi}$

Άρα $B\left(0\ ,\ \dfrac{2}{\xi}\right)$

i)

Μέσο του AB : $\left(\dfrac{2\xi+0}{2}\ ,\ \dfrac{0+\frac{2}{\xi}}{2}\right)=\left(\xi,\ \dfrac{1}{\xi}\right)$

ii)

$(OAB)=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}\,|2\xi|\,\left|\dfrac{2}{\xi}\right|=2$