2.1
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 219 – 221

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ στο $x_o = 0$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

1.ii)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ στο $x_o = 1$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(1+x)}{x^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{x^2} = \frac{-(1+1)}{1^2} = -2$$

1.iii)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = ημ^2 x$ στο $x_o = 0$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Κοντά στο $x_o = 0$ είναι $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{ημ^2 x - ημ^2 0}{x-0} = \dfrac{ημ^2 x}{x} = \dfrac{ημx}{x}\,ημx$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}\cdot\lim_{x\to 0} ημx = 1\cdot 0 = 0$$

2.i)

Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x|x|$ στο $x_o = 0$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Για $x \neq 0$ είναι $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x|x|-0}{x-0} = |x|$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

2.ii)

Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = |x-1|$ στο $x_o = 1$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Για $x \neq 1$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{|x-1|-0}{x-1} = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(-1) = -1 \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$

2.iii)

Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = |x^2-3x|$ στο $x_o = 1$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Πρόσημο του τριωνύμου x^2-3x

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		+		-		+	

Κοντά στο $x_o = 1$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-(x^2-3x)-|1^2-3\cdot 1|}{x-1}$

$$= \frac{-x^2+3x-2}{x-1}$$

$$= \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = 2-x$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(2-x) = 2-1 = 1$$

2.iv)

Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ x+1, & x \ge 0 \end{cases}$

στο $x_o = 0$

Λύση

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+1-(0+1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 0+1 = 1 \quad \textbf{(1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1-(0+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \quad \textbf{(2)}$$

Από (1) και (2) έχουμε $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση

f είναι συνεχής στο $0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Για $x \ne 0$ είναι $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x\,f(x)-0\cdot f(0)}{x} = f(x)$

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow g'(0) = f(0)$

4.i)

Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο $x_o = 0$ τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x^3, & x \ge 0 \end{cases}$$

να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Λύση

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 = 0$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο 0, άρα ούτε παραγωγίσιμη σ'αυτό.

4.ii)

Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο $x_o = 1$ τη συνάρτηση

$$f(x) = |x-1| + 1$$

να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (|x-1|+1) = 1$ και $f(1) = |1-1| + 1 = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, οπότε f συνεχής στο 1

Για $x < 1$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-(x-1)+1-1}{x-1} = -1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$ **(1)**

Για $x > 1$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x-1+1-1}{x-1} = 1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$ **(2)**

Από (1) , (2) συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1

5.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (αν ορίζεται) στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ για κάθε μία των ασκήσεων 1 και 2 .

Λύση

- Για την άσκηση **(1i)** , αποδείχθηκε $f'(0) = 0$ και $f(0) = 1$
  Οπότε **ε :** $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
  $y - 1 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 1$

- Για την άσκηση **(1ii)** , αποδείχθηκε $f'(1) = -2$ και $f(1) = 1$
  Οπότε **ε :** $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$
  $y - 1 = -2(x - 1)$
  $y - 1 = -2x + 2 \Leftrightarrow y = -2x + 3$

- Για την άσκηση **(1iii)** , αποδείχθηκε $f'(0) = 0$ και $f(0) = 0$
  Οπότε **ε :** $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
  $y - 0 = 0\,(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$

- Για την άσκηση **(2i)** , αποδείχθηκε $f'(0) = 0$ και $f(0) = 0$
  Οπότε **ε :** $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
  $y - 0 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$

- Για την άσκηση **(2ii)** , αποδείχθηκε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ άρα δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 0)$

- Για την άσκηση **(2iii)** , αποδείχθηκε $f'(1) = 1$ και $f(1) = 2$
  Οπότε **ε :** $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$
  $y - 2 = 1(x - 1)$
  $y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1$

- Για την άσκηση (2iv) , αποδείχθηκε $f'(0) = 1$. και $f(0) = 1$
  Οπότε **ε :** $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
  $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 2 - x + x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_o = 0$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Κοντά στο $x_o = 0$ είναι $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{2 - x + x\,\eta\mu|x| - 2}{x}$

$$= \frac{x(-1 + \eta\mu|x|)}{x}$$

$$= -1 + \eta\mu|x|$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}(-1 + \eta\mu|x|) = -1 + \eta\mu 0 = -1$$

2.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(1 + h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : **i)** $f(1) = 2$ **ii)** $f'(1) = 3$

Λύση

i)

Για $h = 0$, η υπόθεση δίνει $f(1) = 2$

ii)

Για κάθε $h \neq 0$ είναι $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2}{h} = 3 + 3h + h^2$

Άρα $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3 + 3h + h^2) = 3 + 0 + 0 = 3$

3.

Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , \ x<0\\ ημx+1 & , \ x\ge 0\end{cases}$, να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(0, 1) και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\frac{\pi}{4}$

Λύση

Για $x<0$ είναι $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x}$

$$=\frac{1-(1-x)}{x(1-x)}$$

$$=\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$ **(1)**

Για $x>0$ είναι $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{ημx+1-1}{x}=\dfrac{ημx}{x}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημx}{x}=1$ **(2)**

Από (1) , (2) $\Rightarrow$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Άρα , στο σημείο Α(0, 1) ορίζεται εφαπτομένη της C_f με συντελεστή διεύθυνσης $f'(0)=1=εφ\frac{\pi}{4}$

4.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\text{συν}\,x}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ στο $x_o = 0$

Λύση

Για $x \neq 0$ είναι

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{1-\text{συν}\,x}{x}-0}{x}$$

$$= \frac{1-\text{συν}\,x}{x^2}$$

$$= \frac{(1-\text{συν}\,x)(1+\text{συν}\,x)}{x^2(1+\text{συν}\,x)}$$

$$= \frac{1-\text{συν}^2\,x)}{x^2(1+\text{συν}\,x)}$$

$$= \frac{\text{ημ}^2\,x}{x^2(1+\text{συν}\,x)} = \left(\frac{\text{ημ}\,x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\text{συν}\,x}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{ημ}\,x}{x}\right)^2 . \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\text{συν}x} = 1^2\,\frac{1}{1+\text{συν}0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

5.

Αν $x+1 \le f(x) \le x^2+x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι **:**

i) $f(0)=1$

ii) $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1$ για κάθε $x<0$ και

$1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1$ για κάθε $x>0$

iii) $f'(0)=1$

Λύση

i)

Για $x=0$ η υπόθεση $\Rightarrow$ $1 \le f(0) \le 1$ $\Rightarrow$ $f(0)=1$

ii)

$x+1 \le f(x) \le x^2+x+1 \quad \Rightarrow \quad x+1-1 \le f(x)-f(0) = \le x^2+x+1-1$

$$x \le f(x)-f(0) = \le x^2+x \qquad \textbf{(1)}$$

- Για $x<0$, η (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{x} \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge \dfrac{x^2+x}{x}$

  $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1 \qquad \textbf{(2)}$

- Για $x>0$, η (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{x} \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le \dfrac{x^2+x}{x}$

  $1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1 \qquad \textbf{(3)}$

iii)

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$, με κριτήριο παρεμβολής στη (2) θα έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1 \qquad \textbf{(4)}$$

Ομοίως, με κριτήριο παρεμβολής στη (3) θα έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1 \qquad \textbf{(5)}$$

Από τις (4), (5) $\Rightarrow$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$

6.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$ημ^2x - x^4 \le x f(x) \le ημ^2 x + x^4$$

να αποδείξετε ότι :

i) $f(0) = 0$ **ii)** $f'(0) = 1$

Λύση

i)

f συνεχής στο σημείο $x_o = 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ **(1)**

Αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Για $x > 0$, η υπόθεση $\Rightarrow$ $\dfrac{ημ^2x - x^4}{x} \le f(x) \le \dfrac{ημ^2x + x^4}{x}$

$$\frac{ημ^2x}{x} - x^3 \le f(x) \le \frac{ημ^2x}{x} + x^3$$

$$\frac{ημx}{x}\,ημx - x^3 \le f(x) \le \frac{ημx}{x}\,ημx + x^3 \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{ημx}{x}\,ημx \pm x^3\right) = 1 \cdot ημ0 \pm 0^3 = 0.$

Με το κριτήριο παρεμβολής στη (2) θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \overset{(1)}{=} f(0)$

ii)

Για $x \ne 0$ η υπόθεση $\Rightarrow$ $\dfrac{ημ^2x - x^4}{x^2} \le \dfrac{xf(x)}{x^2} \le \dfrac{ημ^2x + x^4}{x^2}$

$$\frac{ημ^2x}{x^2} - x^2 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{ημ^2x}{x^2} + x^2$$

$$\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 - x^2 \le \frac{f(x) - f(0)}{x} \le \left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x^2 \quad \textbf{(3)}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} \left[\left(\dfrac{ημx}{x}\right)^2 \pm x^2\right] = 1^2 \pm 0 = 1$

Με κριτήριο παρεμβολής στην (3) θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Άρα $f'(0) = 1$

7.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$, να αποδείξετε ότι :

i) $f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=4$

Λύση

i)

f είναι συνεχής στο 0 $\Rightarrow$ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}\,x\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\,.\,\lim_{x\to 0} x = 4\,.\,0=0$$

ii)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$$

8.

Να αποδείξετε ότι , αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}=-f'(x_o)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{h}=2f'(x_o)$

Λύση

f παραγωγίσιμη στο x_o $\Rightarrow$ $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_o+u)-f(x_o)}{u}=f'(x_o)$ **(1)**

i)

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+(-h))-f(x_o)}{-h}$ (όπου $-h$ θέτουμε u

$=-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_o+u)-f(x_o)}{u}$ οπότε και $u\to 0$)

$\overset{(1)}{=}-f'(x_o)$

ii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}$$

$$\overset{(1,\ i)}{=}f'(x_o)-(-f'(x_o))=2f'(x_o)$$