

Ερωτήσεις κατανόησης σελίδας 201 - 203

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1.

Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

β) $(f \circ g)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$

Αιτιολογία

α) Είναι ψευδής διότι

$$D_f = (0, +\infty), \quad D_g = \mathbb{R}$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ με } f(x) \in D_g\}, \text{ δηλαδή } x > 0 \text{ με } \ln x \in \mathbb{R} \Rightarrow x > 0$$

Άρα $D_{g \circ f} = (0, +\infty)$ και όχι το \mathbb{R}^*

β) Είναι αληθής διότι

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ με } g(x) \in D_f\}, \text{ δηλαδή } x \in \mathbb{R} \text{ με } e^{-x} > 0, \text{ οπότε}$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \text{ και } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln e^{-x} = -x$$

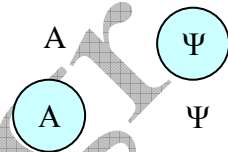
2.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

Αιτιολογία

Θέτω $\frac{f(x)}{x-1} = g(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell$.

Τότε $f(x) = (x-1)g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)g(x) = 0 \cdot \ell = 0$



3.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0$$

A

**Αιτιολογία**

Είναι ψευδής, διότι ο πολλαπλασιασμός $0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x}$ δε δίνει αποτέλεσμα 0, αφού είναι η απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$ ή $0(-\infty)$

4.

Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$

A

**Αιτιολογία**

Είναι ψευδής, διότι μπορεί να είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Π. x Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$

είναι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

5.

Ισχύει: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$



Ψ

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

A

**Αιτιολογία**

Το (α) είναι αληθές διότι:

Θέτω $\frac{1}{x} = u$, οπότε $u \rightarrow 0$.

Αλλά $\frac{1}{u} = x$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u} \cdot \eta\mu u \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu u}{u} \right) = 1$

Το (β) είναι ψευδής διότι:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{1}{|x|} |\eta\mu x| \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

6.

Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$

A

Ψ

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 f(x) \leq x^2$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$.

7.

Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (a, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι

A

Ψ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Λύση

Είναι ψευδής . Μπορεί η f να μην έχει καν όριο στο $+\infty$

8.

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)g(6)$

A

Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι δεν ξέρουμε αν η $f(x)g(x)$ είναι συνεχής στο 6.

9.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι

A

Ψ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$$

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι μπορεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ να μην υπάρχει.

Π.χ Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|x|} = 1 \text{ ενώ το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ δεν υπάρχει}$$

10.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$



Ψ

Αιτιολογία

Από τον ορισμό του ορίου (είναι εκτός ύλης) έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \ell] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - \ell| = 0$$

Για $\ell = 0$ προκύπτει το ζητούμενο

11.

Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και για $x \neq 4$ ισχύει

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, \quad \text{τότε} \quad f(4) = 1$$

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$$\begin{aligned} f \text{ συνεχής} \Rightarrow f(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x - 3)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3) = 1 \end{aligned}$$



Ψ

12.

Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$,

τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ έτσι ώστε

$$f(x_0) = \pi$$

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

Η f συνεχής στο $[-1, 1]$, $f(-1) \neq f(1)$ και $3 < \pi < 4$

Από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ έτσι ώστε $f(x_0) = \pi$



Ψ

II

Κυκλώστε την σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις

1.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

τότε κατ' ανάγκη θα είναι :

A) $\ell < m$

B) $\ell \leq m$

Γ) $\ell \leq m$

Δ) $\ell = m$

E) $m < \ell$

2.

Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με

A 8

B 1

Γ 0

Δ $+\infty$

E -8

3.

Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με

A $+\infty$

B $-\infty$

Γ 1

Δ -1

E 0

4.

Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε

A $x_0 = 0$

B $x_0 = 2$

Γ $x_0 = -1$

Δ $x_0 = 1$

III

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

A) η g είναι συνεχής στο 2

B) η f είναι συνεχής στο 1

Γ η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

2.

Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένα;

A $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x + 1}$

B $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x - 1}$

Γ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$

Δ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$

E $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x + 1)]$

ΣΤ $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x - 1)]$

3.

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = [0, 3]$ με $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $f(3) = -1$

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

A. Υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$

Γ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Δ. $[-1, 2] \subseteq f(\Delta)$

E Η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη το -1