1.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 174 – 176

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^5 - 4x^3 - 2x + 5)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}(x^{10} - 2x^3 + x - 1)$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}(x^8 + 2x + 3)^{20}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 3}[(x-5)^3|x^2-2x-3|]$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x-5}{x+3}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-3x|+|x-2|}{x^2+x+1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2}$ **viii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2+4x+3}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 0}(x^5 - 4x^3 - 2x + 5) = 0 - 4\cdot 0 - 2\cdot 0 + 5 = 5$$

ii)

$$\lim_{x\to 1}(x^{10} - 2x^3 + x - 1) = 1 - 2\cdot 1 + 1 - 1 = -1$$

iii)

$$\lim_{x\to -1}(x^8 + 2x + 3)^{20} = [\lim_{x\to -1}(x^8 + 2x + 3)]^{20}$$
$$= [(-1)^8 + 2\cdot(-1) + 3]^{20} = [1 - 2 + 3]^{20} = 2^{20}$$

iv)

$$\lim_{x\to 3}[(x-5)^3|x^2-2x-3|] = \lim_{x\to 3}(x-5)^3 \,.\, \lim_{x\to 3}|x^2-2x-3|$$
$$= (3-5)^3|3^2-2\cdot 3-3|$$
$$= \{-2)^3|9-6-3| = \{-2)^3\cdot 0 = 0$$

v)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x-5}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^4+2x-5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+3)} = \frac{1+2-5}{1+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

vi)

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x^2-3x|+|x-2|}{x^2+x+1} = \frac{|0^2-3\cdot 0|+|0-2|}{0^2+0+1} = \frac{2}{1} = 2$$

vii)

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 1}(x+2)^2} = \sqrt[3]{(1+2)^2} = \sqrt[3]{9}$$

viii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2+4x+3} = \frac{\sqrt{1^2+1+2}-2}{1^2+4\cdot 1+3} = \frac{2-2}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

2.

Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} g(x)$, αν:

i) $g(x) = 3(f(x))^2 - 5$

ii) $g(x) = \dfrac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1}$

iii) $g(x) = (f(x)+2)(f(x)-3)$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}[3(f(x))^2 - 5] = 3\cdot 4^2 - 5 = 43$$

ii)

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}\frac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1} = \frac{|2\cdot 4-11|}{(4)^2+1} = \frac{3}{17}$$

iii)

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}[(f(x)+2)(f(x)-3)] = (4+2)(4-3) = 6$$

3.

Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$

Λύση

i)

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}=\dfrac{2^4-16}{2^3-8}=\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^3-2^3}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{x^2+2x+4}$$
$$=\frac{(2+2)(4+4)}{4+4+4}=\frac{4\cdot 8}{12}=\frac{8}{3}$$

ii)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+1}{1^2-1}=\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x+1}$$
$$=\frac{2\cdot 1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

iii)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1-\frac{1}{1}}{1-\frac{1}{1^2}}=\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}$$

iv)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-27}{x} = \frac{(0+3)^3-27}{0} = \frac{27-27}{0} = \frac{0}{0}$$ απροσδιοριστία.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-27}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-27}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-3^3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+3-3)[(x+3)^2+(x+3)3+3^2]}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}[\,(x+3)^2+3(x+3)+9\,] =$$

$$= (0+3)^2+3(0+3)+9 \;=\; 9+9+9 \;=\; 27$$

4.

Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \frac{3-\sqrt{9}}{9-9} = \frac{0}{0}$$ απροσδιοριστία.

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{3^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1-\sqrt{1-0^2}}{0^2} = \frac{0}{0}$$ απροσδιοριστία

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-0^2}} = \frac{1}{2}$$

iii)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{\sqrt{2^2+5}-3} = \frac{\sqrt{4}-2}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0}$$ απροσδιοριστία

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2+5-9)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+5}+3}{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{3+3}{4\cdot 4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

iv)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{4}-2}{4^2-5\cdot 4+4} = \frac{0}{0}$$ απροσδιοριστία

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{x-1}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$= \frac{1}{4-1}\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{12}$$

5.

Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της f στο x_0 αν:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 5x, & x > 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$

ii) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ x^2+1, & x \ge -1 \end{cases}$ και $x_0 = -1$

Λύση

i)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (5x) = 5$ Επομένως δεν υπάρχει το όριο της f στο 1.

ii)

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2x) = -2\,(-1) = 2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2$ Επομένως $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$

6.

Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ3x}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{εφx}{x}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{εφ4x}{ημ2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - ημx}{x}$ **v)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx}{x^3 + x}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ5x}{\sqrt{5x+4} - 2}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{ημ3x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(3\,\frac{ημ3x}{3x}\right) = 3\lim_{x\to 0} \frac{ημ3x}{3x} \overset{*}{=} 3\lim_{u\to 0} \frac{ημu}{u} = 3\cdot 1 = 3$$

$*$ Θέσαμε $3x = u$, οπότε $u \to 0$

ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{εφx}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{ημx}{x}\cdot\frac{1}{συνx}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x}\cdot\lim_{x\to 0} \frac{1}{συνx}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{συν0} = \frac{1}{1} = 1$$

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\varepsilon\varphi 4x}{x}}{\frac{\eta\mu 2x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 4x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}$$

$$= 4\lim_{4x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot\frac{1}{1} = 4\cdot 1\cdot 1 = 4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} = 2\lim_{2x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$$

(1) $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x} = \frac{4}{2} = 2$

iv)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1-\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1-1 = 0$$

v)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1} = 1\cdot\frac{1}{0^2+1} = 1$$

vi)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x\,(\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x\,(\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}(\sqrt{5x+4}+2)$$

$$= \lim_{5x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot(\sqrt{5\cdot 0+4}+2) = 1\,(2+2) = 4$$

7.

Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to\pi}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to\pi}(1-\sigma\upsilon\nu x) = 1-(-1) = 2$$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\varepsilon\varphi x = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

8.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν :

i) $1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $1 - x^4 \le f(x) \le \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Λύση

i)

$\lim\limits_{x\to 0}(1 - x^2) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2) = 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

ii)

$\lim\limits_{x\to 0}(1 - x^4) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \dfrac{1}{1} = 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

9.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x+\beta, & x \le 3 \\ \alpha x+3\beta, & x > 3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 10$.

Λύση

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 10 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 10$$

$$\lim_{x\to 3^-} (2\alpha x + \beta) = 10 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^-} (\alpha x + 3\beta) = 10$$

$$6\alpha + \beta = 10 \quad \text{και} \quad 3\alpha + 3\beta = 10$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \text{και} \quad 3\alpha + 3(10 - 6\alpha) = 10$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \text{και} \quad 3\alpha + 30 - 18\alpha = 10$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \text{και} \quad -15\alpha = -20$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\beta = 10 - 6\cdot\frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+4}=\frac{2^2+2+1}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{7}{12}$$

ii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu+1}-\nu x-x+\nu}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^{\nu}-1)-\nu(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ .\ .\ .\ +1)-\nu(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}[\ x(\ x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ .\ .\ .\ +1)-\nu\ ]$$

$$=1\ (1+1+\ .\ .\ .\ +1)-\nu=\nu-\nu=0$$

iii)

Θέτουμε $\sqrt{x}=u$, οπότε $u\to\sqrt{1}=1$ και έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-1}{u^2u+u-2}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-1}{u^3+u-2}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u+1)}{(u-1)(u^2+u+2)}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u+1}{u^2+u+2}=\frac{1+1}{1^2+1+2}=\frac{1}{2}$$

2.

Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

i) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Λύση

i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$, $x \neq -5$

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+5)^2}}{x+5} = \frac{|x+5|}{x+5} = \begin{cases} -1, & x < -5 \\ 1, & x > -5 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -5^-} (-1) = -1$ και $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -5^+} 1 = 1$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο -5

ii)

$x \to 5^- \Rightarrow x < 5$ οπότε

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{-x+5+x^2-4x-5}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-5x}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} x = 5$$

iii)

$x \to 5^+ \Rightarrow x > 5$ οπότε

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{x-5+x^2-4x-5}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-3x-10}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} (x+2) = 5+2 = 7$$

iv)

Θέτουμε $\sqrt{x} = u$, οπότε $u \to \sqrt{1} = 1$ και έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u^4-u}{u-1}$$

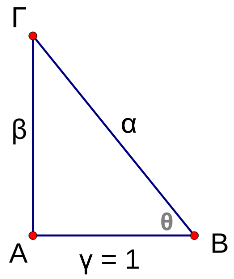
$$= \lim_{u\to 1} \frac{u(u^3-1)}{u-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u(u-1)(u^2+u+1)}{u-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} [u(u^2+u+1)] = 1(1+1+1) = 3$$

3.

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\gamma = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:



i) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$ **ii)** $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$

Λύση

Είναι $\gamma = \alpha\,\text{συν}\theta$ και $\text{εφ}\theta = \frac{\beta}{\gamma}$

$1 = \alpha\,\text{συν}\theta$ και $\text{εφ}\theta = \frac{\beta}{1}$

$\alpha = \frac{1}{\text{συν}\theta}$ και $\beta = \text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}$

i)

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\text{συν}\theta} - \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\right) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \text{ημ}\theta)(1 + \text{ημ}\theta)}{\text{συν}\theta(1 + \text{ημ}\theta)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{ημ}^2\theta}{\text{συν}\theta(1 + \text{ημ}\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}^2\theta}{\text{συν}\theta(1 + \text{ημ}\theta)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}\theta}{1 + \text{ημ}\theta} = \frac{\text{συν}\frac{\pi}{2}}{1 + \text{ημ}\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1+1} = 0$$

ii)

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \gamma^2 = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} 1^2 = 1$$

iii)

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}}{\frac{1}{\text{συν}\theta}} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \text{ημ}\theta = \text{ημ}\frac{\pi}{2} = 1$$

4.

Να βρείτε το $\lim_{x\to1} f(x)$, αν:

i) $\lim_{x\to1}(4\,f(x) + 2 - 4x) = -10$ **ii)** $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 1$

Λύση

i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 4\,f(x) + 2 - 4x$, x κοντά στο 1

$$g(x) - 2 + 4x = 4\,f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(g(x) - 2 + 4x\,)$$

Η υπόθεση γίνεται $\lim_{x\to1} g(x) = -10$

Επομένως $\lim_{x\to1} f(x) = \dfrac{1}{4}\lim_{x\to1}(g(x) - 2 + 4x\,)$

$$= \frac{1}{4}(-10 - 2 + 4\cdot1) = \frac{1}{4}(-8\,) = -2$$

ii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-1}$, x κοντά στο 1

$$f(x) = g(x)\,(x-1)$$

Η υπόθεση γίνεται $\lim_{x\to1} g(x) = 1$

Επομένως $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}[g(x)\,(x-1)]$

$$= \lim_{x\to1} g(x)\,\lim_{x\to1}\,(x-1)] = 1\cdot(1-1) = 0$$