2.3

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 100 - 102

Α΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών :

$1 + i$, $1 - i$, $3 + 4i$, $3 - 4i$, $-5i$, -4, $\frac{1+i}{1-i}$,

$(1-i)^2 \cdot (1+i)^4$, $(2-i)\cdot(1+2i)$, και $\frac{3+i}{4-3i}$

Λύση

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|-4| = 4$$

$$|-5i| = |-5|\,|i| = 5 .\ 1 = 5$$

$\left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = 1$ (οι $1 + i$, $1 - i$ είναι συζυγείς, άρα έχουν ίδιο μέτρο)

$$\left|(1-i)^2\cdot(1+i)^4\right| = \left|(1-i)^2\right|\left|(1+i)^4\right| = |(1-i)|^2\,|(1+i)|^4 = \sqrt{2}^2\,\sqrt{2}^4 = 2\cdot 4 = 8$$

$$|(2-i)\cdot(1+2i)| = |2-i|\,|1+2i| = \sqrt{4+1}\,\sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,\sqrt{5} = 5$$

$$\left|\frac{3+i}{4-3i}\right| = \frac{|3+i|}{|4-3i|} = \frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{16+9}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

netsuccess.gr

2.

Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών :

$(1+i)^2$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$, $\left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| + |\mu| \neq 0$

Λύση

$$\left|(1+i)^2\right| = |(1+i)|^2 = \sqrt{1+1}^{\,2} = 2$$

$$\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right|^2 = \left(\frac{|1+i|}{|1-i|}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right| = \left|\frac{1-i}{1+i}\right|^2 = \left(\frac{|1-i|}{|1+i|}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\left|\left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2\right| = \left|\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right|^2 = \left(\frac{|\lambda+\mu i|}{|\lambda-\mu i|}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right)^2 = 1$$

netsuccess.gr

3.

Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, για τους οποίους ισχύει :

α) $|z^2| = z^2$ **β)** $|z-1| = z$ **γ)** $|z+i| = 2\bar{z}$

Λύση

α)

$|z^2| = z^2 \Leftrightarrow |z|^2 - z^2 = 0$

$z\bar{z} - z^2 = 0$

$z(\bar{z} - z) = 0$

$z = 0$ ή $\bar{z} - z = 0$

$z = 0$ ή $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

β)

Επειδή $0 \le |z-1| = z$, ο z είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός,, έστω $z = x$.

Η δοσμένη εξίσωση ισοδυναμεί $|x-1| = x$

$(x-1)^2 = x^2$

$x^2 - 2x + 1 = x^2$

$2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

γ)

Επειδή $0 \le |z+i| = 2\bar{z}$, ο $\bar{z}$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός,

άρα και ο z. Έστω $z = x = \bar{z}$, $x \ge 0$

Η δοσμένη εξίσωση ισοδυναμεί $|x+i| = 2x$

$\sqrt{x^2 + 1^2} = 2x$

$x^2 + 1 = 4x^2$

$3x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ αφού $x \ge 0$

netsuccess.gr

4.

Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει :

α) $|z| = 1$ **β)** $|z - i| = 1$

γ) $|z + 1 + 2i| = 3$ **δ)** $1 < |z| < 2$

ε) $|z| \geq 2$

Λύση

α)

$|z| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 0i)| = 1 \Leftrightarrow$ ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 1.

β)

$|z - i| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 1)i| = 1 \Leftrightarrow$ ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(0, 1)$ και ακτίνα 1.

γ)

$|z + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-1 - 2i)| = 3 \Leftrightarrow$ ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(-1, -2)$ και ακτίνα 3

δ)

$1 < |z| < 2 \Leftrightarrow 1 < |z - (0 + 0i)| < 2 \Leftrightarrow$ ο z ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 2 και στο εξωτερικό του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 1.

ε)

$|z| \geq 2 \Leftrightarrow |z - (0 + 0i)| \geq 2 \Leftrightarrow$ ο z ανήκει στο εξωτερικό του κύκλου, ή πάνω στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 2

netsuccess.gr

5.

Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει :

α) . $|z+1| = |z-2i|$ **β)** $|z-i| > |z+1|$

Λύση

α)

$|z+1| = |z-2i| \iff |z-(-1+0i)| = |z-(0+2i)| \iff$

Οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στη μεσοκάθετο του τμήματος AB, όπου $A(-1, 0)$ και $B(0, 2)$

β)

$|z-i| > |z+1| \iff |z-(0+i)| > |z-(-1+0i)| \iff$

Οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του τμήματος $\Gamma\Delta$ και το σημείο Δ, όπου $\Gamma(0, 1)$ και $\Delta(-1, 0)$.

6.

Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z = \frac{1+xi}{x+i}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z| = 1 \iff \left|\frac{1+xi}{x+i}\right| = 1$

$$\frac{|1+xi|}{|x+i|} = 1$$

$$|1+xi| = |x+i|$$

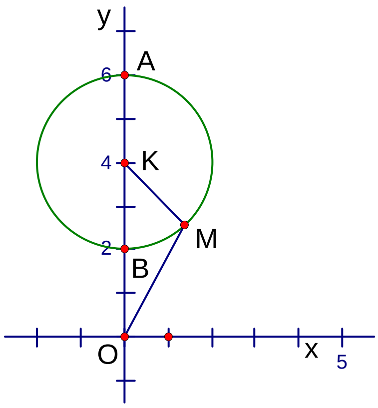
$$\sqrt{1^2+x^2} = \sqrt{x^2+1^2} \quad \text{που ισχύει.}$$

netsuccess.gr

7.

Από τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει $|z-4i| = 2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

Λύση



$|z-4i| = 2 \iff |z-(0+4i)| = 2 \iff$
οι εικόνες του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K(0, 4)$ και ακτίνα 2.

Έστω M η εικόνα του τυχαίου z και A, B τα σημεία τομής του κύκλου με την OK. Τότε $A(0, 6)$ και $B(0, 2)$
Από το τρίγωνο MOK έχουμε

$$|(OK)-(KM)| \le (OM) \le (OK)+(KM) \Rightarrow$$
$$|(OK)-(KB)| \le (OM) \le (OK)+(KA) \Rightarrow$$
$$(OB) \le (OM) \le (OA) \quad \textbf{(1)}$$

Έστω z_1 ο μιγαδικός z που έχει εικόνα το σημείο A, οπότε $z_1 = 6i$
και z_2 ο μιγαδικός z που έχει εικόνα το σημείο B, οπότε $z_2 = 2i$
Η (1) $\Rightarrow$ $|z_2| \le |z| \le |z_1|$.
Επομένως, ο μιγαδικός z που έχει το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z_2 = 2i$ και ο μιγαδικός z που έχει το μέγιστο μέτρο είναι ο $z_1 = 6i$.

8.

Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z + 1$.

Λύση

$$w = 2z+1 \Rightarrow w-1 = 2z \Rightarrow z = \frac{1}{2}(w-1) \quad \textbf{(1)}$$

$$|z| = 1 \overset{(1)}{\iff} \left|\frac{1}{2}(w-1)\right| = 1$$
$$\frac{1}{2}|w-1| = 1$$
$$|w-1| = 2 \iff |w-(1+0i)| = 2$$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(1, 0)$ και ακτίνα 2.

netsuccess.gr

9.

Για δύο μιγαδικούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

Λύση

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) \\ &= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 \\ &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \end{aligned}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει :

$$\sqrt{2}\,|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

Λύση

Έστω $z = x + yi$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geq |x| + |y| \\ & \quad\quad 2(x^2+y^2) \geq x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \\ & \quad\quad 2x^2+2y^2 \geq x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \\ & \quad\quad x^2 + y^2 - 2|x|\,|y| \geq 0 \\ & \quad\quad (|x| - |y|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει.

2.

Έστω ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι :

Αν $|z| = 1$, τότε ο $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

Λύση

w φανταστικός $\Leftrightarrow$ $w = -\overline{w}$

$$\begin{aligned} &\frac{z-1}{z+1} = -\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} \\ &z\overline{z} + z - \overline{z} - 1 = -z\overline{z} + z - \overline{z} + 1 \\ &2z\overline{z} = 2 \\ &|z|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1 \end{aligned}$$

netsuccess.gr

3.

Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι :

Ο $w = z + \dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Λύση

w πραγματικός $\Leftrightarrow$ $w = \overline{w}$

$$z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$$

$$zz\overline{z} + \overline{z} = \overline{z}z\overline{z} + z$$

$$z|z|^2 + \overline{z} = |z|^2\,\overline{z} + z$$

$$z|z|^2 + \overline{z} - |z|^2\,\overline{z} - z = 0$$

$$|z|^2(z - \overline{z}) - (z - \overline{z}) = 0$$

$$(z - \overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

$$z - \overline{z} = 0 \quad \text{ή} \quad |z|^2 - 1 = 0$$

$$z = \overline{z} \quad \text{ή} \quad |z|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad |z| = 1.$$

4.

Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

Ο $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

Λύση

w φανταστικός $\Leftrightarrow$ $w = -\overline{w}$

$$\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha} = -\frac{\overline{z}+\alpha\,\overline{i}}{\overline{i}\,\overline{z}+\alpha}$$

$$\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha} = -\frac{\overline{z}-\alpha i}{-i\overline{z}+\alpha}$$

$$(z + \alpha i)(-i\overline{z} + \alpha) = (iz + \alpha)(\alpha i - \overline{z})$$

$$-iz\overline{z} + z\alpha + \alpha\overline{z} + \alpha^2 i = -z\alpha - iz\overline{z} + \alpha^2 i - \alpha\overline{z}$$

$$2z\alpha = -2\alpha\overline{z} \quad \text{και αφού} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$z = -\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \ \text{φανταστικός}$$

netsuccess.gr

5.

Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{2z - i}{iz + 2}$

Λύση

Για τον z, δίνεται ότι $|z| = 1$.

Για τον w, αρκεί να δείξουμε ότι $|w| = 1$.

$|w| = 1 \iff |w|^2 = 1 \iff w\overline{w} = 1$

$$\frac{2z-i}{iz+2}\,\frac{2\overline{z}-\overline{i}}{\overline{i}\overline{z}+2} = 1$$

$$\frac{2z-i}{iz+2}\,\frac{2\overline{z}+i}{-i\overline{z}+2} = 1$$

$$(2z - i)(2\overline{z} + i) = (iz + 2)(-i\overline{z} + 2)$$

$$4z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4$$

$3z\overline{z} = 3 \iff |z|^2 = 1$ που ισχύει

6.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1| = |z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Λύση

$|2z-1| = |z-2| \Rightarrow |2z-1|^2 = |z-2|^2$

$$(2z - 1)(2\overline{z} - 1) = (z - 2)(\overline{z} - 2)$$

$$4z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 1 = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4$$

$$3z\overline{z} = 3$$

$|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow$

η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

netsuccess.gr

7.

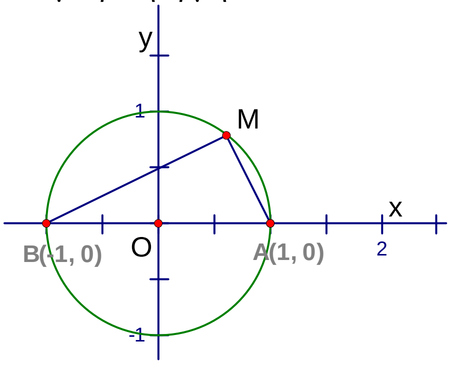
Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$\Pi = |1+z|^2 + |1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

Λύση

$$\begin{aligned}\Pi = |1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) \\ &= 1+\overline{z}+z+z\overline{z} + 1-\overline{z}-z+z\overline{z} \\ &= 2+2z\overline{z} = 2+2|z|^2 = 2+2\cdot 1 = 4\end{aligned}$$

Γεωμετρική ερμηνεία.



Οι εικόνες M των μιγαδικών z, δίνεται ότι είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα 1, που τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία A(1, 0) και B(–1, 0)

AB διάμετρος $\Rightarrow$
τρίγωνο MAB ορθογώνιο στο M $\Rightarrow$
$(MA)^2 + (MB)^2 = (BA)^2$
Αλλά $(MA) = |z-1|$
$(MB) = |z+1|$ και $(AB) = 2$

Άρα $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 2^2 \Rightarrow |1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$

netsuccess.gr

8.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z+1| = |z+4i|$. Ποιο από τα σημεία Μ απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή Ο(0, 0);

Λύση

Έστω $z = x + yi$.

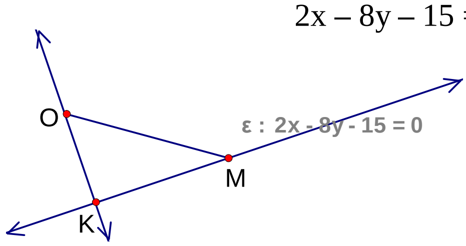
$$|z+1| = |z+4i| \Leftrightarrow |x+yi+1| = |x+yi+4i|$$

$$|(x+1)+yi|^2 = |x+(y+4)i|^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y+4)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 8y + 16$$

$2x - 8y - 15 = 0.$ **(1)** Αυτή η ευθεία (ε) είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ.



Φέρνουμε ΟΚ ⊥ ε και έστω Μ η εικόνα του τυχαίου z.
Τότε (ΟΚ) ≤ (ΟΜ),
δηλαδή το σημείο της (ε), που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το Ο είναι το Κ.

$$\lambda_\varepsilon = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_{OK} = -4$$

Εξίσωση της ευθείας ΟΚ : $y - 0 = -4(x - 0) \Leftrightarrow y = -4x$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) για να βρούμε τις συντεταγμένες του Κ :

$$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2x - 8(-4x) - 15 = 0 \Leftrightarrow 2x + 32x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{34}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = -4\cdot\frac{15}{34} = -\frac{60}{34}$$

Άρα $K\left(\frac{15}{34}, -\frac{60}{34}\right)$

netsuccess.gr

9.

Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι : Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

Λύση

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Δίνεται $|z_1| = 4 \;\Rightarrow\; |z_1|^2 = 16 \;\Rightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = 16$ **(1)**

$$z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1} \;\Rightarrow\; x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{4\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}$$

$$x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{4(x_1 - y_1 i)}{|z_1|^2}$$

$$x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{4(x_1 - y_1 i)}{16}$$

$$x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{x_1 - y_1 i}{4}$$

$$x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{x_1}{4} - \frac{y_1}{4} i$$

$$x_2 = x_1 + \frac{x_1}{4} \quad \text{και} \quad y_2 = y_1 - \frac{y_1}{4}$$

$$x_2 = \frac{5x_1}{4} \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{3y_1}{4}$$

$$x_1 = \frac{4}{5}x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = \frac{4}{3}y_2$$

$$(1) \;\Rightarrow\; \left(\frac{4}{5}x_2\right)^2 + \left(\frac{4}{3}y_2\right)^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; \frac{16}{25}x_2^2 + \frac{16}{9}y_2^2 = 16$$

$$\frac{x_2^2}{5^2} + \frac{y_2^2}{3^2} = 1 \quad \text{εξίσωση έλλειψης}$$

10.

α) Αν $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$

β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ ισχύει $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_\kappa| = 1$

να αποδείξετε ότι : $|z_1 + z_2 + \ldots + z_\kappa| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_\kappa}\right|$

Λύση

α) $|z| = 1 \;\Rightarrow\; |z|^2 = 1 \;\Rightarrow\; z\bar{z} = 1 \;\Rightarrow\; \bar{z} = \frac{1}{z}$

β) $$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_\kappa}\right| \overset{(\alpha)}{=} |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_\kappa|$$

$$= \left|\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\kappa}\right| = |z_1 + z_2 + \ldots + z_\kappa|$$

netsuccess.gr