3.2
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 154 – 156

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Από μία τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

i) Το φύλλο είναι 5
ii) Το φύλλο δεν είναι 5

Λύση

i)
Δεχόμαστε ότι πρόκειται για ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα
Έστω Α το ενδεχόμενο : το φύλλο είναι πέντε .
Επειδή στην τράπουλα των 52 υπάρχουν 4 πεντάρια, οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου Α , είναι $N(A) = 4$, ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι $N(\Omega) = 52$.

Άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

i)
Το ενδεχόμενο : το φύλλο δεν είναι πέντε , είναι το Α΄ αντίθετο του Α.

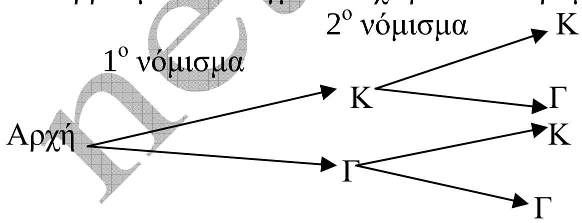
Οπότε $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{13} = \dfrac{12}{13}$

2.

Να βρείτε την πιθανότητα στην ρίψη δύο νομισμάτων (διαδοχικά) να εμφανιστούν δύο "γράμματα".

Λύση

Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος φτιάχνουμε δεντροδιάγραμμα



Όπου Κ= κεφάλι και Γ = γράμματα

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο

$\Omega = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma \}$, άρα $N(\Omega) = 4$.

Αν Α είναι το ενδεχόμενο : δύο "γράμματα" , τότε $A = \{ \Gamma\Gamma \}$, Άρα $N(A) = 1$.

Οπότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$

3.

Ένα κουτί περιέχει μπάλες : 10 άσπρες (Α), 15 μαύρες (Μ) , 5 κόκκινες (Κ) και 10 πράσινες (Π). Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι :

i) μαύρη **ii)** μαύρη ή άσπρη **iii)** ούτε κόκκινη ούτε πράσινη

Λύση

Αφού μέσα στο κουτί υπάρχουν 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες , θα είναι N(Ω) = 40

i)

Έστω Μ το ενδεχόμενο : η μπάλα να είναι μαύρη . Τότε N(M) = 15

Άρα $P(M) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ii)

Έστω Α είναι το ενδεχόμενο : η μπάλα είναι άσπρη . Τότε N(A) = 10

Άρα $P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Το ενδεχόμενο : η μπάλα να είναι μαύρη ή άσπρη, είναι το $M \cup A$ με Α , Μ ασυμβίβαστα.

Οπότε $P(M \cup A) = P(M) + P(A) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

iii)

Το ενδεχόμενο : η μπάλα δεν είναι ούτε πράσινη ούτε κόκκινη , σημαίνει ότι η μπάλα είναι : μαύρη ή άσπρη , που όπως είδαμε έχει πιθανότητα $\frac{5}{8}$.

4.

Σε μία τάξη με 30 μαθητές , ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν.
Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον πίνακα

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή , να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά .

Λύση

Το πλήθος όλων των μαθητών της τάξης είναι 30 , οπότε N(Ω)=30 .
Για να έχει η οικογένεια του μαθητή 3 παιδιά θα πρέπει ο μαθητής που επιλέχτηκε να έχει 2 αδέλφια .

Έστω Α το ενδεχόμενο : ο μαθητής έχει δύο αδέλφια.

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι N(A) = 9

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{9}{30}$

5.

Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} \ / \ 10 \le \omega \le 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega$ πολλαπλάσιο του $3\}$ και $B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega$ πολλαπλάσιο του $4\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες

i) Να ανήκει στο Α

ii) Να μην ανήκει στο Β

Λύση

Από την υπόθεση βλέπουμε ότι το Ω περιέχει σαν στοιχεία τους φυσικούς που ικανοποιούν την σχέση $10 \le \omega \le 20$. Άρα

$\Omega = \{ 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 \}$ με $N(\Omega) = 11$

Το ενδεχόμενο Α περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω τα οποία είναι πολλαπλάσια του 3.

Άρα $A=\{ 12 , 15 ,18 \}$ με $N(A) = 3$

Το Β περιέχει τα στοιχεία του Ω που είναι πολλαπλάσια του 4.

Άρα $B = \{12 , 16 , 20 \}$ με $N(B) = 3$

Οπότε **i)** $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{11}$

ii) Δεν ανήκει στο Β σημαίνει ανήκει στο B' .

Γνωρίζουμε ότι $P(B') = 1 - P(B)$.

Αλλά $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{11}$

Άρα $P(B') = 1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11}$

6.

Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30% , η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40% . Να βρείτε την πιθανότητα

i) Να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος

ii) Να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος

Λύση

Έστω : Λ το ενδεχόμενο κερδίζει ο Λευτέρης, Π κερδίζει ο Παύλος και Ν κερδίζει ο Νίκος

Τότε $P(\Lambda)=\frac{30}{100}$, $P(\Pi)=\frac{20}{100}$ και $P(N)=\frac{40}{100}$

i)

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $\Lambda\cup\Pi$ με Λ και Π ασυμβίβαστα .

Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε ότι

$$P(\Lambda\cup\Pi)=P(\Lambda)+P(\Pi)=\frac{30}{100}+\frac{20}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

ii)

Δεν κερδίζει ο Λευτέρης ή ο Νίκος είναι το ενδεχόμενο $(\Lambda\cup N)'$ οπότε

$$P(\Lambda\cup N)'=1-P(\Lambda\cup N)=1-P(\Lambda)-P(N)=1-\frac{30}{100}-\frac{40}{100}=\frac{30}{100}$$

(πάλι τα Λ και Ν είναι ασυμβίβαστα)

7.

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{17}{30}$

$P(B)=\frac{7}{15}$ και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A\cap B)$

Λύση

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-\frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B)=\frac{11}{30}$$

8.

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω έχουμε

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Να βρείτε την P(B)

Λύση

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

9.

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$P(A) = P(B)$, $P(A\cup B) = 0,6$ και $P(A\cap B) = 0,2$. Να βρείτε την $P(A)$.

Λύση

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0,6 = P(A) + P(A) - 0,2$$

$$0,8 = 2P(A)$$

$$P(A) = 0,4$$

10.

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω έχουμε ότι

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A\cap B) = \frac{1}{12}$.

Να βρείτε την $P(A\cup B)$.

Λύση

$$P(B') = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - P(B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$$

$$= \frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}$$

$$= \frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

11.

Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι
$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$

Λύση

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ και $P(A \cap B) \ge 0$ $\Rightarrow$

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

(Προσθέτουμε στο 2^{o} μέλος την $P(A \cap B)$, άρα αυτό μεγαλώνει)

12.

Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχει κάρτα D, το 55% έχει κάρτα V και το 15% έχει και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα, ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον κάρτα ;

Λύση

Έστω D το ενδεχόμενο, ο πελάτης να έχει κάρτα D. Τότε $P(D) = \frac{25}{100}$,

V το ενδεχόμενο, ο πελάτης να έχει κάρτα V. Τότε $P(V) = \frac{55}{100}$.

Το ενδεχόμενο, ο πελάτης έχει και τις δύο κάρτες είναι το $(D \cap V)$.

Οπότε $P(D \cap V) = \frac{15}{100}$.

Το ενδεχόμενο, ο πελάτης έχει μία τουλάχιστον κάρτα, είναι το $(D \cup V)$.

Οπότε από τον προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(D \cup V) = P(D) + P(V) - P(D \cap V) \Rightarrow P(D \cup V) = \frac{25}{100} + \frac{55}{100} - \frac{15}{100}$$

$$P(D \cup V) = \frac{65}{100}$$

13.

Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση , το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο . Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει

α) τουλάχιστον μία ασθένεια

β) μόνο μία ασθένεια

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα : Υ = το άτομο έχει υπέρταση , οπότε $P(Y) = \frac{10}{100}$

Σ = το άτομο έχει στεφανιαία , οπότε $P(\Sigma) = \frac{6}{100}$

Το ενδεχόμενο : το άτομο έχει και τις δύο ασθένειες , είναι το $Y \cap \Sigma$,

οπότε $P(Y \cap \Sigma) = \frac{2}{100}$

α)

Το ενδεχόμενο : το άτομο έχει μία τουλάχιστον ασθένεια είναι το $Y \cup \Sigma$.

Οπότε $$P(Y \cup \Sigma) = P(Y) + P(\Sigma) - P(Y \cap \Sigma)$$
$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}$$

β)

Το ενδεχόμενο : το άτομο έχει μία μόνο ασθένεια είναι το $(Y - \Sigma) \cup (\Sigma - Y)$

και επειδή τα $Y - \Sigma$, $\Sigma - Y$ είναι ασυμβίβαστα , με τον απλό προσθετικό

νόμο θα έχουμε $$P\left[(Y - \Sigma) \cup (\Sigma - Y)\right] = P(Y - \Sigma) + P(\Sigma - Y) \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά $P(Y - \Sigma) = P(Y) - P(Y \cap \Sigma) = \frac{10}{100} - \frac{2}{100} = \frac{8}{100}$

και $P(\Sigma - Y) = P(\Sigma) - P(Y \cap \Sigma) = \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{4}{100}$

(1) $\Rightarrow$ $P\left[(Y - \Sigma) \cup (\Sigma - Y)\right] = \frac{8}{100} + \frac{4}{100} = \frac{12}{100}$

14.

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά , το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα, να μη μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα Α : μαθαίνει αγγλικά , με $P(A)=\frac{80}{100}$

Γ : μαθαίνει γαλλικά , με $P(\Gamma)=\frac{30}{100}$

Το ενδεχόμενο, μαθαίνει και τις δύο γλώσσες είναι το $A\cap\Gamma$ με $P(A\cap\Gamma)=\frac{20}{100}$

Το ενδεχόμενο δεν μαθαίνει καμία γλώσσα είναι το

$$\begin{aligned} P(A\cup\Gamma)' &= 1-P(A\cup\Gamma) \\ &= 1-\left[P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)\right] \\ &= 1-P(A)-P(\Gamma)+P(A\cap\Gamma) \\ &= 1-\frac{80}{100}-\frac{30}{100}+\frac{20}{100} = \frac{10}{100} \end{aligned}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A) = \kappa$, $P(B) = \lambda$ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες

i) να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α και Β

ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β

iii) να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα Α και Β

Λύση

i)

Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β είναι το ενδεχόμενο $A \cup B$ οπότε από τον προσθετικό νόμο έχουμε ότι

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \kappa + \lambda - \mu$

ii)

Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται είναι το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$

οπότε έχουμε
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B)' &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (\kappa + \lambda - \mu) \\
&= 1 - \kappa - \lambda + \mu
\end{aligned}
$$

iii)

Ένα μόνο από τα Α και Β πραγματοποιείται, είναι το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$ και επειδή , τα ενδεχόμενα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα , θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \kappa - \mu + \lambda - \mu \\
&= \kappa + \lambda - 2\mu
\end{aligned}
$$

2.

Σε μία κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση , το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαία ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο .

Λύση

Έστω Τ = το ενδεχόμενο το νοικοκυριό δεν έχει τηλεόραση με $P(T)=\frac{15}{100}$

Β = το ενδεχόμενο το νοικοκυριό δεν έχει βίντεο με $P(B)=\frac{40}{100}$

Τότε , το νοικοκυριό δεν έχει ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο είναι το $(T\cap B)$

με $P(T\cap B)=\frac{10}{100}$

Ζητάμε την πιθανότητα , επιλέγοντας ένα νοικοκυριό στην τύχη , να έχει τηλεόραση και βίντεο. Δηλαδή ζητάμε την $P(T'\cap B')$.

Από διάγραμμα Venn, διαπιστώνουμε ότι $(A\cup B)'=(A'\cap B')$

Οπότε
$$\begin{aligned} P(T'\cap B') &= P(T\cup B)' \\ &= 1-P(T\cup B) \\ &= 1-\left[P(T)+P(B)-P(T\cap B)\right] \\ &= 1-P(T)-P(B)+P(T\cap B) \\ &= 1-\frac{15}{100}-\frac{40}{100}+\frac{10}{100} = \frac{55}{100} \end{aligned}$$

3.

Αν $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$

Λύση

$$\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{aligned}[t] & 4P(A)=3P(A') \\ & 4P(A)=3[1-P(A)] \\ & 4P(A)=3-3P(A) \\ & 7P(A)=3 \\ & P(A)=\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

4.

Αν $0 < P(A) < 1$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4$

Λύση

Έστω $P(A) = p$ με $0 < p < 1$, οπότε $P(A') = 1 - p > 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{1-p} \geq 4$

$$1 - p + p \geq 4p(1 - p)$$

$$1 \geq 4p - 4p^2$$

$$4p^2 - 4p + 1 \geq 0$$

$(2p - 1)^2 \geq 0$ που ισχύει

5.

Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}7$, να δείξετε ότι $0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6$

Λύση

- Για την ανισότητα $P(A \cap B) \leq 0{,}6$

  $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A \cap B) \leq 0{,}6$

- Για την ανισότητα $0{,}3 \leq P(A \cap B)$

  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cup B)$

  $P(A \cap B) = 1{,}3 - P(A \cup B)$ **(1)**

Αρκεί να αποδείξουμε $0{,}3 \leq P(A \cap B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$0{,}3 \leq 1{,}3 - P(A \cup B)$$

$$-1 \leq -P(A \cup B)$$

$P(A \cup B) \geq 0$ που ισχύει

6.

Για δύο ενδεχόμενα A και B του ιδίου δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι $P(B)-P(A') \le P(A\cap B)$

Λύση

$$P(B)-P(A')\le P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B)-(1-P(A)) \le P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$P(B)-1+P(A) \le P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$-1+\le -P(A\cup B)$$

$$P(A\cup B) \le 1 \quad \text{που ισχύει}$$