

Γενικές ασκήσεις 2^{ου} κεφαλαίου (σελ. 126 – 130)

1.

Ο αριθμός των παιδιών σε ένα δείγμα 80 οικογενειών μιας πόλης δίνονται στον πίνακα .

Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	4	5	6
Οικογένειες	10	25	20	12	6	5	2

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή ,την διάμεση τιμή, και την τυπική απόκλιση του αριθμού των παιδιών.
 β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

Λύση

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων συμπληρωμένος με τις κατάλληλες στήλες είναι ο παρακάτω

Αριθ. Παιδ. x_i	Πλήθος οικ. v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0	10	0	0	12,50	12,50
1	25	25	25	31,25	43,75
2	20	40	80	25,00	68,75
3	12	36	108	15,00	83,75
4	6	24	96	7,50	91,25
5	5	25	125	6,25	97,50
6	2	12	72	2,50	100,00
Σύνολο	80	162	506	100,00	-----

α)

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^7 x_i v_i = \frac{162}{80} = 2,025 \text{ παιδιά}$$

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 80, η διάμεσος δ θα είναι ίση με το ημίαθροισμα της 40^{ης} και 41^{ης} των παρατηρήσεων.

Από τον πίνακα συχνοτήτων βλέπουμε ότι η 40^η και η 41^η παρατηρήσεις έχουν

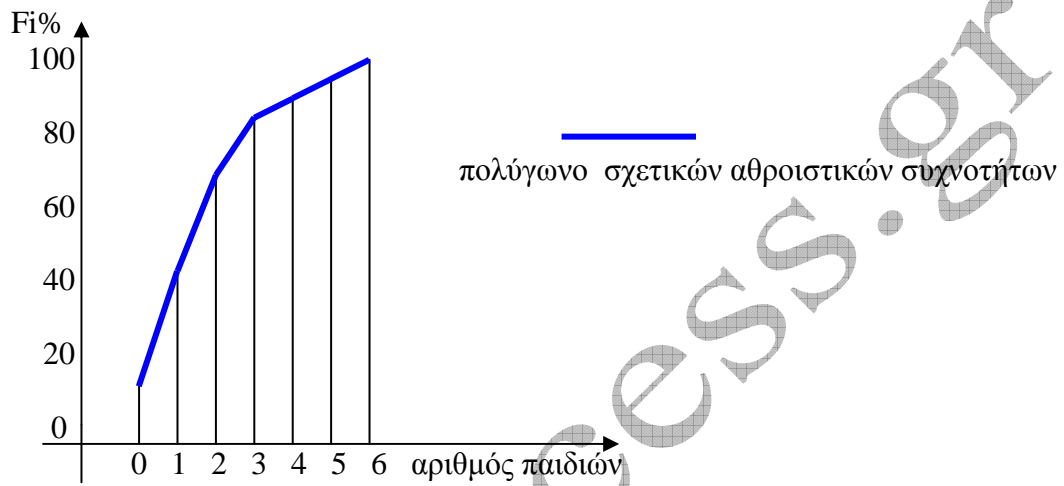
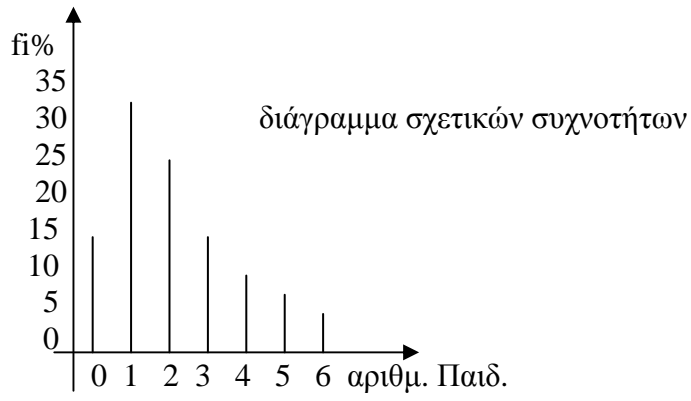
τιμή 2 οπότε $\delta = \frac{40^{\text{η}} + 41^{\text{η}}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$ παιδιά

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^7 x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^7 x_i v_i)^2}{v} \right\} = \frac{1}{80} \left(506 - \frac{162^2}{80} \right) = 2,224$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $S = \sqrt{2,224} = 1,49$ περίπου παιδιά .

β)

Το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων είναι τα παρακάτω



2.

Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών που βρέθηκαν στις 60 σελίδες ενός κειμένου στην πρώτη του διόρθωση ήταν

3 4 5 2 6 7 2 2 3 4 5 6 7 4 0
 6 4 0 0 2 3 1 1 4 5 4 3 3 7 6
 4 3 2 1 0 1 2 3 3 3 4 4 5 6 8
 3 9 3 1 0 4 4 5 5 6 6 7 8 9 5

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε ισοπλατείς κλάσεις πλάτους 2 και να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων
 β) Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων και τα αντίστοιχα πολύγωνα συχνοτήτων
 γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την κορυφή και την τυπική απόκλιση.

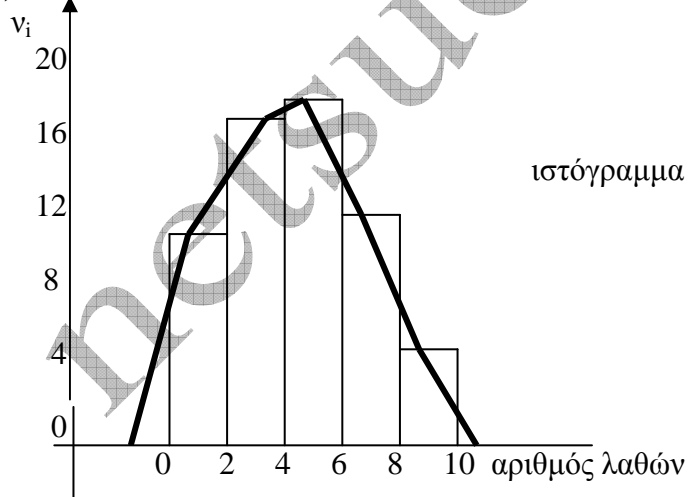
Λύση

α)

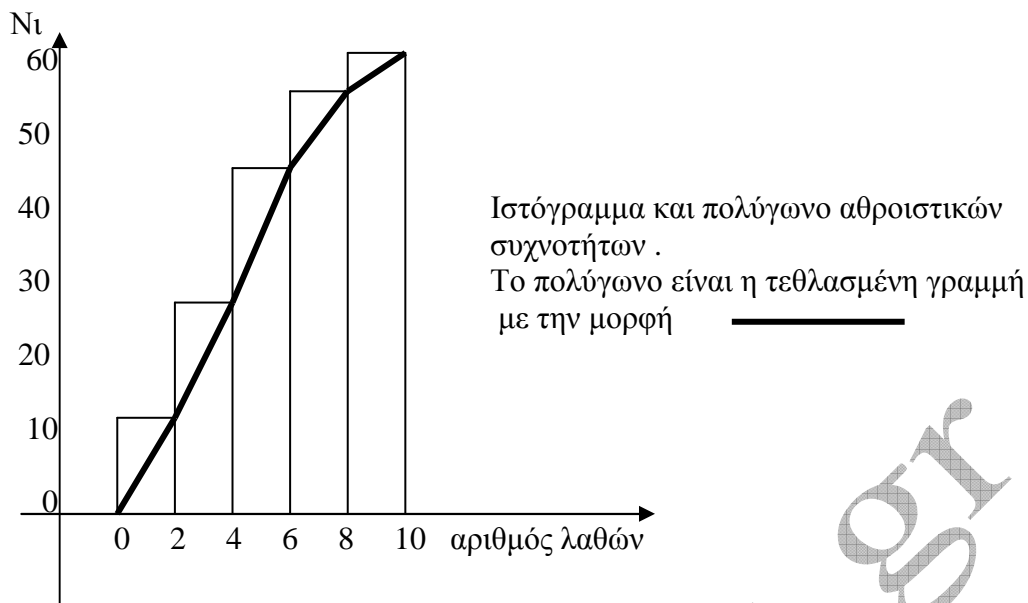
Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρωμένος με τις κατάλληλες στήλες είναι ο

Κλάσεις [,)	Κετρ.τιμή x_i	Συχν. v_i	Αθρ.συχν. N_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
[0 ,2)	1	10	10	10	10
[2 ,4)	3	17	27	51	153
[4 ,6)	5	18	45	90	450
[6 ,8)	7	11	56	77	539
[8 ,10)	9	4	60	36	324
Σύνολο	-----	60	-----	264	1476

β)



Για να φτιάξουμε το πολύγωνο συχνοτήτων, θεωρούμε αριστερά της πρώτης κλάσης και δεξιά της τελευταίας κλάσης δύο ακόμα κλάσεις με συχνότητα 0, και ενώνουμε τα μέσα των πάνω βάσεων όλων των κλάσεων. Η τεθλασμένη γραμμή που προκύπτει είναι το πολύγωνο συχνοτήτων. Στο σχήμα μας το πολύγωνο είναι η γραμμή



γ)

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \frac{264}{60} = 4,4 \text{ λάθη}$$

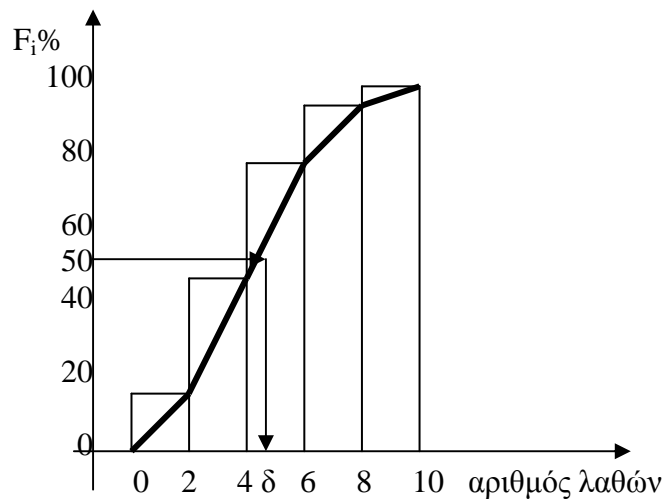
$$s^2 = \frac{1}{60} \left\{ \sum_{i=1}^5 x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^5 x_i v_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{60} \left(1476 - \frac{264^2}{60} \right) = 5,24$$

Οπότε η τυπική αποκλιση είναι $S = \sqrt{5,24} = 2,29$ λάθη περίπου

Για να βρούμε τη διάμεσο θα κατασκευάσουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών % ($F_i\%$) συχνοτήτων και θα δούμε ποια τιμή αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων. Συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων με τις στήλες των $f_i\%$ και $F_i\%$ οπότε έχουμε

Κλάσεις [,)	Συχνοτ. v_i	Σχ.συχν $f_i\%$	Αθρ. Σχ συχν $F_i\%$
[0 , 2)	10	16,7	16,7
[2 , 4)	17	28,3	45,0
[4 , 6)	18	30,0	75,0
[6 , 8)	11	18,3	93,3
[8 , 10)	4	6,7	100,0
σύνολο	60	100	-----

Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των $F_i\%$ είναι το παρακάτω



από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι η διάμεσος δ είναι : $\delta = 4,3$ λάθη περίπου

netsuccess.gr

4.

Τα εργατικά ατυχήματα που συνέβησαν το 1990 και το 1994 δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

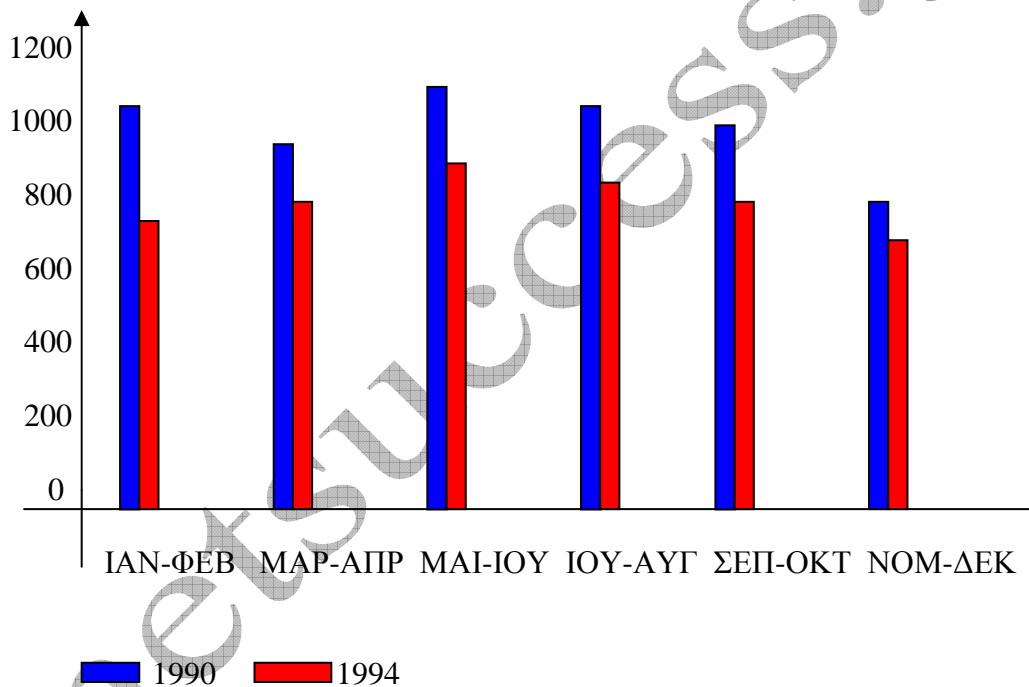
Μήνες	1990	1994
Ιαν-Φεβρ	1057	692
Μαρτ-Απρλ	927	716
Μια-Ιουν	1114	829
Ιουλ-Αυγς	1020	783
Σεπτ-Οκτ	941	809
Νοεμ-Δεκ	775	636
Σύνολο	5834	4465

- α) Να απεικονίσετε τα δεδομένα σ' ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων
 β) Πόσα ατυχήματα συνέβησαν κατά μέσο όρο τα έτη 1990 και 1994;
 γ) Το 1,4% των ατυχημάτων του 1990 και το 2,1% του 1994 ήταν θανατηφόρα. Πόσα ατυχήματα ήταν θανατηφόρα για τα αντίστοιχα έτη; Ποιο είναι το συμπέρασμασας ;

Λύση

α)

Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων είναι το παρακάτω



β)

Το 1990 συνέβησαν κατά μέσο όρο $\bar{x} = \frac{5834}{12} = 486$ ατυχήματα περίπου ανά μήνα

και το 1994 $\bar{x} = \frac{4465}{12} = 372$ ατυχήματα περίπου ανά μήνα

γ)

Τα θανατηφόρα ατυχήματα του 1990 ήταν : $5834 \cdot 1,4\% = 5834 \cdot \frac{1,4}{100} = 82$ περίπου

και το 1994 ήταν : $4465 \cdot 2,1\% = 4465 \cdot \frac{2,1}{100} = 94$ περίπου

Παρατηρούμε ότι, ενώ συνολικά το 1994 είχαμε λιγότερα ατυχήματα, σε αυτό το έτος είχαμε τα ποιο πολλά θανατηφόρα.

Ακόμα παρατηρούμε ότι το 1990 είχαμε κατά την διάρκεια του έτους μία μικρή πτώση των ατυχημάτων (από 3^ο δίμηνο και μετά), ενώ το 1994 ο αριθμός των ατυχημάτων ήταν περίπου σταθερός ανά δίμηνο.

netsuccess.gr

5.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την διάρκεια ζωής δύο τύπων ηλεκτρικών συσκευών A και B σε χιλιάδες ώρες . Μια ηλεκτρική συσκευή τύπου A στοιχίζει 230 ευρώ.

A	B
12	12
14	13
23	16
30	22
36	32

α) Ποιόν τύπο ηλεκτρικής συσκευής θα προτιμήσετε, αν μία συσκευή τύπου B στοιχίζει :

i) 180 ευρώ ii) 190 ευρώ iii) 200 ευρώ.

Να αιτιολογήσετε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας .

β) Ποιου τύπου οι ηλεκτρ. συσκευές παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια λειτουργίας τους ;

Λύση

α)

Για να μπορέσουμε να δούμε ποια συσκευή μας συμφέρει να επιλέξουμε θα πρέπει να βρούμε ένα κατάλληλο μέτρο σύγκρισης . Ένα τέτοιο μέτρο είναι το κόστος ανά ώρα λειτουργίας.

Η μέση διάρκεια ζωής των συσκευών τύπου A είναι

$$\bar{x}_A = \frac{12+14+23+30+36}{5} = 23 \text{ χιλιάδες ώρες} = 23000 \text{ ώρες}$$

Οπότε κατά μέσο όρο μία τέτοια συσκευή στοιχίζει ανά ώρα λειτουργίας :

$$\frac{230 \text{ ευρώ}}{23000 \text{ ώρες}} = 0,01 \text{ ευρώ/ώρα} = 1 \text{ λεπτό} / \text{ώρα}$$

Η μέση διάρκεια ζωής των συσκευών τύπου B είναι

$$\bar{x}_B = \frac{12+13+16+22+32}{5} = 19 \text{ χιλιάδες ώρες} = 19000 \text{ ώρες}$$

επομένως κατά μέσο όρο μία συσκευή τύπου B στοιχίζει ανά ώρα λειτουργίας .

$$\text{i) } \frac{180 \text{ ευρώ}}{19000 \text{ ώρες}} = 0,0095 \text{ ευρώ} / \text{ώρα} = 0,95 \text{ λεπτά} / \text{ώρα}$$

$$\text{ii) } \frac{190 \text{ ευρώ}}{19000 \text{ ώρες}} = 0,01 \text{ ευρώ} / \text{ώρα} = 1 \text{ λεπτό} / \text{ώρα}$$

$$\text{iii) } \frac{200 \text{ ευρώ}}{19000 \text{ ώρες}} = 0,0105 \text{ ευρώ} / \text{ώρα} = 1,05 \text{ λεπτά} / \text{ώρα}$$

Όπως βλέπουμε, όταν η συσκευή τύπου B στοιχίζει 180 ευρώ μας συμφέρει να επιλέξουμε τύπου B συσκευή διότι στοιχίζει λιγότερο ανά ώρα λειτουργίας

Όταν στοιχίζει 190 ευρώ, τότε όποιον τύπο και να επιλέξουμε το ίδιο είναι και όταν στοιχίζει 200 ευρώ πρέπει να επιλέξουμε τον τύπο A, διότι αυτός είναι φτηνότερος ανά ώρα λειτουργίας .

β)

Βρίσκουμε τους συντελεστές μεταβολής των δύο περιπτώσεων .

$$S_A^2 = \frac{(12-23)^2 + (14-23)^2 + (23-23)^2 + (30-23)^2 + (36-23)^2}{5} = \frac{420}{5} = 84$$

$$\text{Άρα } S_A = \sqrt{84} = 9,165 \quad \text{οπότε } CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{9,165}{23} = 0,398 = 39,8\%$$

$$S_B^2 = \frac{(12-19)^2 + (13-19)^2 + (16-19)^2 + (22-19)^2 + (32-19)^2}{5} = \frac{272}{5} = 54,4$$

$$\text{Άρα } S_B = \sqrt{54,4} = 7,376 \quad \text{οπότε } CV_B = \frac{S_B}{x_B} = \frac{7,376}{19} = 0,388 = 38,8\%$$

Επειδή $CV_B < CV_A$, οι ηλεκτρικές συσκευές τύπου Β παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τις ώρες λειτουργίας τους .

netsuccess.gr

6.

Σε δειγματοληπτική έρευνα που έγινε στις 15 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε) μία εβδομάδα πριν και μία εβδομάδα μετά το Συμβούλιο Κορυφής (Σ.Κ) που έγινε τον Μάιο του 1998, τα ποσοστά των ατόμων που αισθάνονταν πολύ καλά πληροφορημένα για το ενιαίο νόμισμα (ευρώ) δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

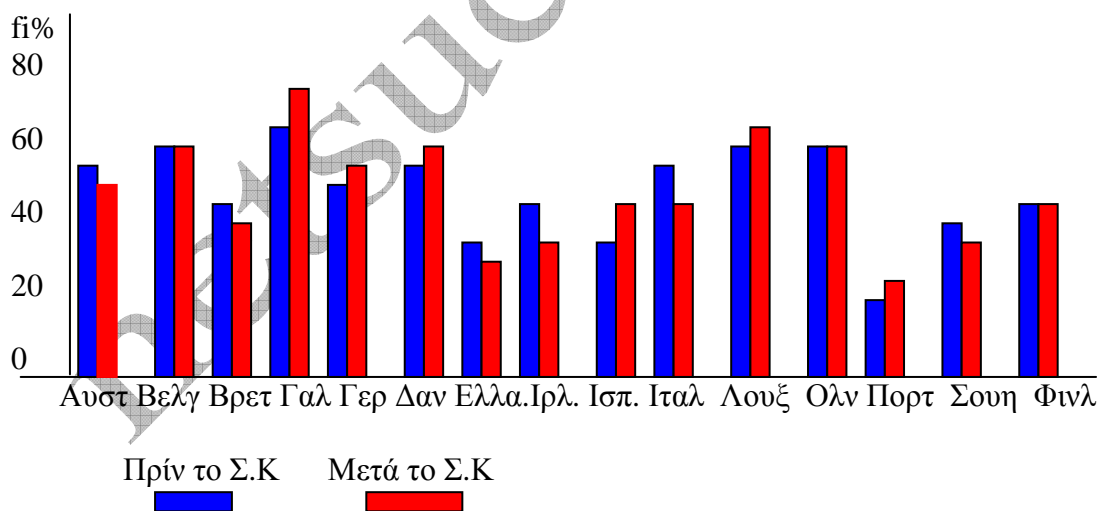
Χώρα	Πριν Σ.Κ	Μετά Σ.Κ	Χώρα	Πριν Σ.Κ	Μετά Σ.Κ
Αυστρία	50	47	Ισπανία	30	39
Βέλγιο	55	55	Ιταλία	49	39
Βρετανία	40	35	Λουξε/γο	56	62
Γαλλία	61	72	Ολλανδία	56	55
Γερμανία	44	48	Πορτο/για	18	20
Δανία	51	53	Σουηδία	40	38
Ελλάδα	26	22	Φινλανδία	45	45
Ιρλανδία	41	29			

- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε μορφή ραβδογράμματος
 β) Να βρεθεί το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων για τις 15 χώρες της Ε.Ε πριν και μετά το Σ.Κ, υπολογίζοντας i) τον αριθμητικό μέσο και ii) το σταθμικό μέσο ποσοστό με βάση τους πληθυσμούς των 15 χωρών μελών της Ε.Ε. Ποιος από τους δύο μέσους είναι ο αντιπροσωπευτικότερος;

Λύση

α)

Το ζητούμενο Ραβδόγραμμα είναι



β)

i) Πριν το Σ.Κ το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων είναι

$$\bar{\pi}_{\text{πριν}} = \frac{50+55+40+61+44+51+26+41+30+49+56+56+18+40+45}{15} = \frac{662}{15} = 44,1\%$$

Μετά το Σ.Κ το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων είναι

$$\bar{\pi}_{\text{μετα}} = \frac{47+55+35+72+\dots+20+38+45}{15} = \frac{659}{15} = 43,9\%$$

ii) Για να βρούμε τους σταθμικούς μέσους με συντελεστές βαρύτητας τους πληθυσμούς των αντίστοιχων χωρών θα μας βοηθήσει ο παρακάτω πίνακας στον οποίο αναφέρονται οι πληθυσμοί των χωρών.

Πρώτα θα βρούμε τον σταθμικό μέσο πριν το Σ.Κ

Χώρα	Ποσοστό π_i πριν	Πληθυσμός w_i	$\pi_i w_i$
Αυστρία	50	8.040.000	402.000.000
Βέλγιο	55	10.131.000	557.205.000
Βρετανία	40	58.276.000	2.331.040.000
Γαλλία	61	58.027.000	3.539.647.000
Γερμανία	44	81.553.000	3.588.332.000
Δανία	51	5.216.000	266.016.000
Ελλάδα	26	10.442.000	271.492.000
Ιρλανδία	41	3.577.000	146.657.000
Ισπανία	30	39.170.000	1.175.100.000
Ιταλία	49	57.248.000	2.805.152.000
Λουξ/γο	56	407.000	22.792.000
Ολλανδί.	56	15.423.000	863.688.000
Πορτ/λια	18	9.912.000	178.416.000
Σουηδία	40	8.818.000	352.720.000
Φιλανδία	45	5.099.000	229.455.000
Σύνολο	662	371.339.000	16.729.712.000

Οπότε ο σταθμικός μέσος πριν το Σ.Κ είναι

$$\bar{\pi}_{\text{w πριν}} = \frac{\sum_{i=1}^i \pi_i w_i}{\sum_{i=1}^{15} w_i} = \frac{16.729.712.000}{371.339.000} = 45\% \text{ περίπου}$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι ο σταθμικός μέσος μετά το Σ.Κ είναι

$$\bar{\pi}_{\text{w μετά}} = 46\%$$

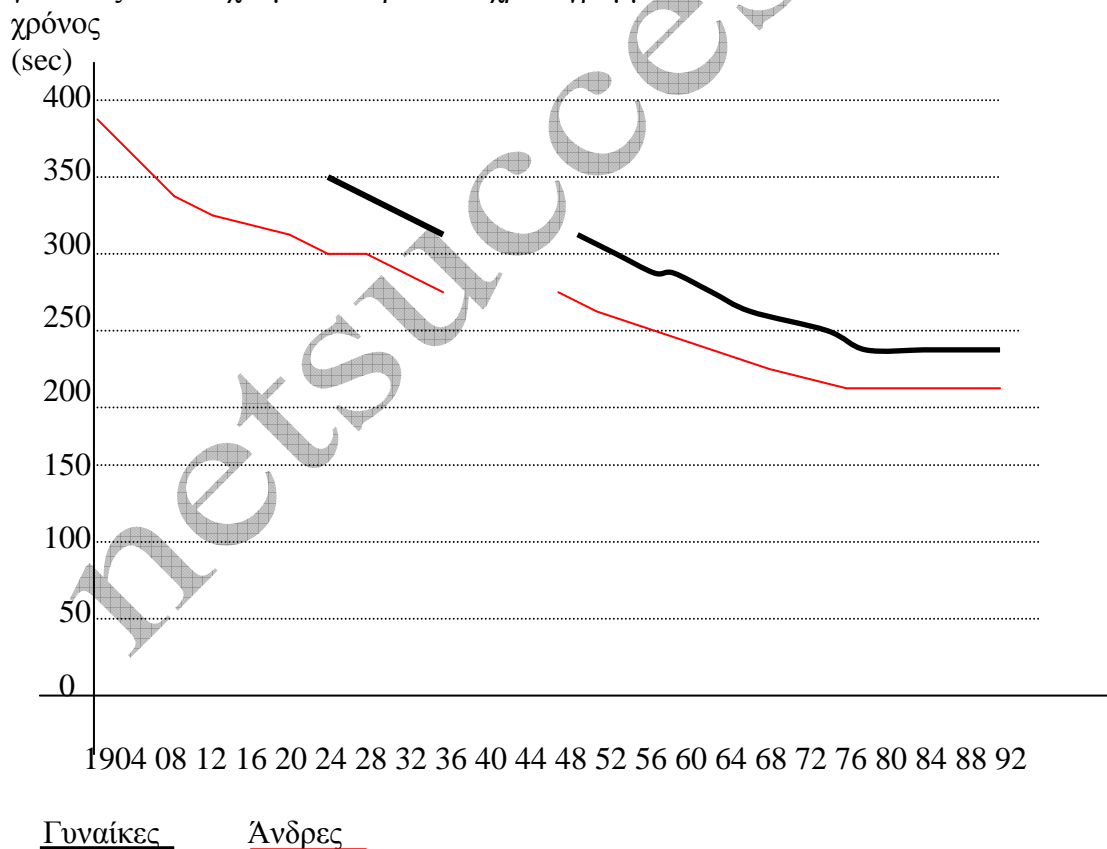
Είναι φανερό ότι ποιο αντιπροσωπευτικός είναι ο σταθμικός μέσος

7.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι χρόνοι (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) των νικητών των Ολυμπιακών αγώνων στην κολύμβηση στα 400 μέτρα ελεύθερας ανδρών και γυναικών. Να σχεδιάσετε το χρονογράμμα για κάθε φύλλο. Τι συμπέρασμα βγάζετε ;

Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών	Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών
1904	6:16.2	-	1956	4:27.3	4:54.6
1908	5:36.8	-	1960	4:18.3	4:50.6
1912	5:24.4	-	1964	4:12.2	4:43.3
1920	5:26.8	-	1968	4:09.0	4:31.8
1924	5:04.2	6:02.2	1972	4:00.3	4:19.4
1928	5:01.6	5:42.8	1976	3:51.9	4:09.9
1932	4:48.4	5:28.5	1980	3:51.3	4:08.8
1936	4:44.5	5:26.4	1984	3:51.2	4:07.1
1948	4:41.0	5:17.8	1988	3:47.0	4:03.9
1952	4:30.7	5:12.1	1992	3:45.0	4:07.2

Μετατρέπουμε τους χρόνους σε δευτερόλεπτα και για τους άνδρες και για τις γυναίκες οπότε έχουμε τα παρακάτω χρονογράμματα .



Παρατηρούμε ότι με την πάροδο του χρόνου οι αθλητές γίνονται ταχύτεροι