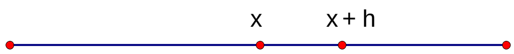
Γενικές ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 47 – 49

1.

Αν μια συρμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους $\left(\rho = \frac{m}{\ell}\right)$ και μετριέται σε χιλιόγραμμα ανά μέτρο (kgr/m). Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της μετρούμενη από το αριστερό άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό απόσταση x μέτρα δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x)$, τότε ορίζουμε ως γραμμική πυκνότητα ρ στο σημείο x το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος.



Αν υποθέσουμε ότι για μια ράβδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x) = \sqrt{x}$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και η μάζα της σε χιλιόγραμμα, να βρεθεί

i) η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου στο διάστημα $[1,\ 1{,}21]$

ii) η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x = 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Μέση πυκνότητα $\bar{\rho} = \dfrac{f(1{,}21)-f(1)}{1{,}21-1} = \dfrac{\sqrt{1{,}21}-\sqrt{1}}{0{,}21} = \dfrac{1{,}1-1}{0{,}21} = \dfrac{0{,}1}{0{,}21} = \dfrac{10}{21}$

ii)

Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x = 1$ είναι $f'(1)$.

Αλλά $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

2.

Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο

$$C(x) = x^3 - 3\nu x^2 + 5\nu^3 \text{ ευρώ.}$$

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 - \nu$ ευρώ.
Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

Προτεινόμενη λύση

$C'(x) = 3x^2 - 6\nu x = 3x(x - 2\nu)$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2\nu = 0 \Leftrightarrow x = 2\nu$

$C'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2\nu > 0 \Leftrightarrow x > 2\nu$

Το πρόσημο της C' και η μονοτονία της C φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		2ν		$+\infty$
C'		$-$	0	$+$	
C		γν. φθίν		γν. αύξ	

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 2\nu$ μονάδες προϊόντος.
Επομένως, για να έχουμε ελάχιστο κόστος πρέπει από ν εργάτες να παράγονται ημερησίως 2ν μονάδες προϊόντος.

Αφού το ημερήσιο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 - \nu$, το συνολικό ημερήσιο κέρδος για 2ν μονάδες προϊόντος θα είναι $(16 - \nu)\cdot 2\nu$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(\nu) = (16 - \nu)\cdot 2\nu$

$K(\nu) = 2(16\nu - \nu^2)$ που εκφράζει το ημερήσιο κέρδος

$K'(\nu) = 2(16 - 2\nu) = 4(8 - \nu)$

$K'(\nu) = 0 \Leftrightarrow 8 - \nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 8$

$K'(\nu) > 0 \Leftrightarrow 8 - \nu > 0 \Leftrightarrow \nu < 8$

Το πρόσημο της K' και η μονοτονία της K φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		8		$+\infty$
K'		$+$	0	$-$	
K		γν. αύξ		γν. φθίν	

Άρα η K παρουσιάζει μέγιστο κέρδος για $\nu = 8$ εργάτες, τότε η ημερήσια παραγωγή είναι $2\cdot 8 = 16$ μονάδες προϊόντος .
Επομένως έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος όταν παράγονται 16 μονάδες προϊόντος από 8 εργάτες

3.

Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

Προτεινόμενη λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Στο τυχαίο σημείο $(x,\ f(x))$, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$. Αυτής της συνάρτησης αναζητάμε το ελάχιστο.

$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$

Το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -1$

Είναι $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= -1 + 3 + 2 - 1 = 3$

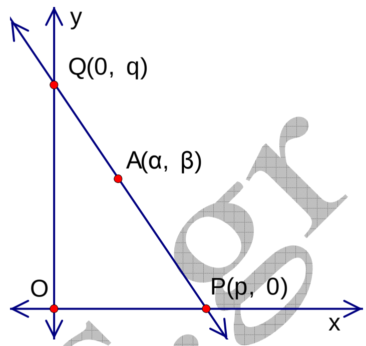
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(-1,\ 3)$

4.

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο $A(\alpha,\ \beta)$ του πρώτου τεταρτημορίου. Μια ευθεία ε διέρχεται από το A και τέμνει του θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα p και q αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $p+q$ είναι ίση με $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\varepsilon:\ y=\lambda x+\mu$, όπου $\lambda<0$ αφού η ε τέμνει τους θετικούς ημιάξονες.



Θα βρούμε όλα τα στοιχεία του προβλήματος συναρτήσει της μεταβλητής λ και βέβαια των σταθερών $\alpha,\ \beta$.

$A\in\varepsilon \ \Rightarrow\ \beta=\lambda\alpha+\mu \ \Rightarrow\ \mu=\beta-\lambda\alpha$

Άρα $\varepsilon:\ y=\lambda x+\beta-\lambda\alpha$ **(1)**

Για $y=0$, η (1) $\Rightarrow$ $\lambda x+\beta-\lambda\alpha=0$

$\lambda x=\lambda\alpha-\beta$

$x=\alpha-\dfrac{\beta}{\lambda}$

$p=\alpha-\dfrac{\beta}{\lambda}$ **(2)**

Για $x=0$, η (1) $\Rightarrow$ $y=\beta-\lambda\alpha$ $\Rightarrow$ $q=\beta-\lambda\alpha$ **(3)**

(2) + (3) $\Rightarrow$ $p+q=\alpha-\dfrac{\beta}{\lambda}+\beta-\lambda\alpha$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma(\lambda)=\alpha-\dfrac{\beta}{\lambda}+\beta-\lambda\alpha$ που εκφράζει το άθροισμα $p+q$, και της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο. (Τονίζουμε, ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο λ)

$\sigma'(\lambda)=0+\beta\dfrac{1}{\lambda^2}+0-\alpha=\beta\dfrac{1}{\lambda^2}-\alpha$

$\sigma'(\lambda)=0 \ \Leftrightarrow\ \beta\dfrac{1}{\lambda^2}-\alpha=0$

$\beta-\alpha\lambda^2=0$

$\alpha\lambda^2=\beta$

$\lambda^2=\dfrac{\beta}{\alpha} \ \Leftrightarrow\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$

$\sigma'(\lambda)>0 \ \Leftrightarrow$ …………………… $\Leftrightarrow\ \lambda<-\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$

Το πρόσημο της σ' και η μονοτονία της σ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$	$-\sqrt{\beta}/\sqrt{\alpha}$	0
σ'	$-$	0	$+$
σ	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η σ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$

Το ελάχιστο είναι $\sigma\left(-\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) = \alpha - \dfrac{\beta}{-\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}} + \beta - \left(-\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right)\alpha$

$$= \alpha + \frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \beta + \sqrt{\beta}\,\sqrt{\alpha}$$

$$= \alpha + \sqrt{\beta}\,\sqrt{\alpha} + \beta + \sqrt{\beta}\,\sqrt{\alpha}$$

$$= \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + 2\sqrt{\beta}\,\sqrt{\alpha} + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$$

5.

Ποιος κύλινδρος με άθροισμα διαμέτρου και ύψους 20 cm έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η ακτίνα της βάσης και y το ύψος του κυλίνδρου.

Τότε $2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x$

Ο όγκος είναι $V = \pi x^2 y = \pi x^2(20-2x) = \pi(-2x^3 + 20x^2) = 2\pi(-x^3 + 10x^2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $V(x) = 2\pi(-x^3 + 10x^2)$ με $0 < x < 10$ που εκφράζει τον όγκο.

$V'(x) = 2\pi(-3x^2 + 20x)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 20x = 0$

$-3x + 20 = 0$

$-3x = -20 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{3}$

$V'(x) > 0 \Leftrightarrow$ ……………….. $\Leftrightarrow x < \dfrac{20}{3}$

Το πρόσημο της V΄ και η μονοτονία της V φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	20/3	10
V΄	+	0	–
V	γν. αύξ		γν. φθίν

Άρα η V παρουσιάζει μέγιστο για $x = \dfrac{20}{3}$ cm ακτίνα της βάσης.

Οπότε το ύψος θα είναι $y = 20 - 2\cdot\dfrac{20}{3} = 20 - \dfrac{40}{3} = \dfrac{20}{3}$

6.
Ένα κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει χωρητικότητα 1 lt. Να βρείτε τις διαστάσεις του, οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί το δοχείο.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x η ακτίνα της βάσης και y το ύψος του κυλίνδρου σε cm

$V = 1000 \quad \Rightarrow \quad \pi x^2 y = 1000 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1000}{\pi} x^{-2}$ **(1)**

Το κόστος κατασκευής του δοχείου εξαρτάται από την ολική επιφάνειά του Ε.

Είναι $E = 2\pi x^2 + 2\pi xy$

$= 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{1000}{\pi} x^{-2}$

$= 2\pi x^2 + 2000 x^{-1}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = 2\pi x^2 + 2000 x^{-1}$ με $x > 0$, που εκφράζει την επιφάνεια.

$E'(x) = 4\pi x - 2000 x^{-2}$

$E'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi x - 2000 x^{-2} = 0$

$2\pi x - 1000 \frac{1}{x^2} = 0$

$2\pi x^3 - 1000 = 0$

$2\pi x^3 = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{1000}{2\pi} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$

$E'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow$ ………………………….. $\Leftrightarrow \quad x > \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$

Το πρόσημο της Ε΄ και η μονοτονία της Ε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	$10/\sqrt[3]{2\pi}$	$+\infty$
Ε΄	−	0	+
Ε	γν. φθίν		γν. αύξ

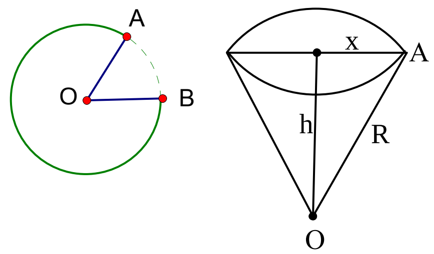
Άρα η Ε παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} = 10 \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{2\pi}$

Τότε, η (1) $\Rightarrow \quad y = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{10}\right)^2 = \frac{1000}{\pi}\,\frac{(\sqrt[3]{2\pi})^2}{100} = 10\frac{(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\pi} = 2x,$

δηλαδή ύψος = διάμετρος βάσης

7.

Από ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας R αφαιρούμε ένα κυκλικό τομέα OAB και ενώνοντας τις ακτίνες OA και OB κατασκευάζουμε ένα κωνικό ποτήρι. Να βρείτε τη μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού.



Προτεινόμενη λύση

Έστω x η ακτίνα του κύκλου – βάση του κωνικού ποτηριού.

Από Πυθαγόρειο θα έχουμε, ύψος κώνου: $h = \sqrt{R^2 - x^2}$

Ο όγκος του κώνου θα είναι $V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$ **(1)**

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi \left(x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \right)' = \frac{1}{3}\pi \left(2x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} (R^2 - x^2)' \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(2x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} (-2x) \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(2x\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

$$2x(R^2 - x^2) - x^3 = 0$$

$$2(R^2 - x^2) - x^2 = 0$$

$$2R^2 - 2x^2 - x^2 = 0$$

$$3x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow x < R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Το πρόσημο της V' και η μονοτονία της V φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		$R\sqrt{\frac{2}{3}}$		R
V'		$+$	0	$-$	
V		γν. αύξ		γν. φθίν	

Άρα η V παρουσιάζει μέγιστο για $x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ ακτίνα της βάσης.

Τότε, από την (1) θα έχουμε, μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού :

$$V\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{2}{3}\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2}$$

$$= \frac{2}{9}\pi R^2 \sqrt{\frac{1}{3}R^2} = \frac{2}{9}\pi R^2 R\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R^3$$

8.

Αν $C(x)$ είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C(x+h)-C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος**.

α) Να αποδείξετε ότι, αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει

οριακό κόστος = μέσο κόστος

β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $C(x) = \dfrac{1}{1000}x^2 + 2x + 2600$

i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

ii) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους.

Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή η συνάρτηση $c(x)$ έχει ελάχιστο για κάποιο x, θα είναι

$$c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 0$$

$$\frac{C'(x)\cdot x - C(x)x'}{x^2} = 0$$

$$C'(x)\cdot x - C(x) = 0$$

$$C'(x)\cdot x = C(x)$$

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h} = \frac{C(x)}{x}$$

οριακό κόστος = μέσο κόστος

β) i)

$C(1000) = \dfrac{1}{1000}1000^2 + 2\cdot 1000 + 2600 =$ ……………………….

$C(2000) = \dfrac{1}{1000}2000^2 + 2\cdot 2000 + 2600 =$ ……………………….

$C(3000) = \dfrac{1}{1000}3000^2 + 2\cdot 3000 + 2600 =$ ……………………….

$c(1000) = \dfrac{C(1000)}{1000} =$ ………………………….

$c(2000) = \dfrac{C(2000)}{2000} =$ ………………………….

$c(3000) = \dfrac{C(3000)}{3000} =$ ………………………….

β) ii)

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1000}x^2 + 2x + 2600\right)$$

$$= \frac{1}{1000}x + 2 + 2600\frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{1000} - 2600\frac{1}{x^2}$$

Το x για το οποίο συμβαίνει το ελάχιστο της c, είναι εκείνο για το οποίο έχουμε

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1000} - 2600\frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 1000 \cdot 2600 = 0$$

$$x^2 = 1000 \cdot 2600$$

$$x^2 = 100 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 100$$

$$x = 10\sqrt{10}\ \sqrt{26}\ 10 \Leftrightarrow x = 100\sqrt{260}$$

9.
Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης p(x) της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**..
Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x) = x\,p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R' λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x) = R(x) - C(x)$. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους**.

α) Να αποδείξετε ότι, αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x) = 3800 + 5x - 0{,}001x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x) = 50 - 0{,}01x$.

Προτεινόμενη λύση

α)
Επειδή η συνάρτηση του κέρδους P(x) έχει μέγιστο για κάποιο x, θα είναι

$$P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[R(x) - C(x)\right]' = 0$$
$$R'(x) - C'(x) = 0$$
$$R'(x) = C'(x)$$

οριακά έσοδα = οριακό κόστος

β)
Αναζητάμε το μέγιστο της συνάρτησης του κέρδους $P(x) = R(x) - C(x)$.

Αλλά $R(x) = x\,p(x)$
$= x(50 - 0{,}01x)$
$= 50x - 0{,}01x^2$

Άρα $P(x) = 50x - 0{,}01x^2 - (3800 + 5x - 0{,}001x^2)$
$= 50x - 0{,}01x^2 - 3800 - 5x + 0{,}001x^2$
$= -0{,}009x^2 + 45x - 3800$

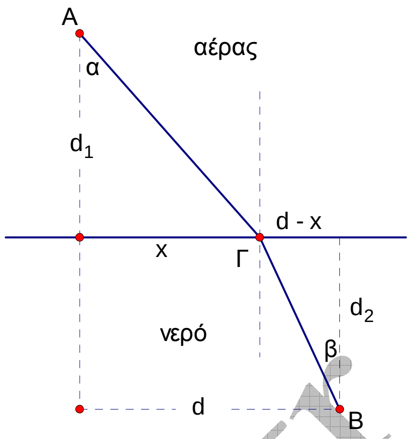
$P'(x) = -0{,}018x + 45$

Το x για το οποίο συμβαίνει το μέγιστο της P, είναι εκείνο για το οποίο έχουμε

$$P'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}018x + 45 = 0$$
$$-0{,}018x = -45$$
$$x = \frac{45}{0{,}018} = \frac{45000}{18} = 2500 \text{ μονάδες προϊόντος}$$

10.

Έστω υ_1 η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και υ_2 η ταχύτητά του στο νερό. Σύμφωνα με την **αρχή του Fermat**, μια ακτίνα φωτός από ένα σημείο Α του αέρα φθάνει σε ένα σημείο Β του νερού ακολουθώντας μια πορεία ΑΓΒ, η ποία ελαχιστοποιεί τον απαιτούμενο χρόνο.



Να αποδείξετε ότι

i) ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη διαδρομή ΑΓΒ είναι

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}{\upsilon_2}$$

ii) να υπολογίσετε την $t'(x)$

iii) να αποδείξετε ότι $\dfrac{ημα}{ημβ} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω t_1 χρόνος για τη διαδρομή ΑΓ και t_2 για τη ΓΒ.

Τότε $t_1 = \dfrac{ΑΓ}{\upsilon_1}$ και $t_2 = \dfrac{ΓΒ}{\upsilon_2}$ **(1)**

Πυθαγόρεια στα δύο ορθογώνια τρίγωνα : $ΑΓ = \sqrt{x^2+d_1^2}$, $ΓΒ = \sqrt{(d-x)^2+d_2^2}$

Οι (1) $\Rightarrow$ $t_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{\upsilon_1}$ και $t_2 = \dfrac{\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}{\upsilon_2}$ $\Rightarrow$

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}{\upsilon_2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{\upsilon_1} + \dfrac{\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}{\upsilon_2}$ που εκφράζει το χρόνο της διαδρομής ΑΓΒ για το τυχαίο x.

ii)

$$t'(x) = \frac{1}{\upsilon_1}\frac{1}{2\sqrt{x^2+d_1^2}}(x^2+\ d_1^2)' + \frac{1}{\upsilon_2}\frac{1}{2\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}[(d-x)^2+d_2^2]'$$

$$= \frac{1}{\upsilon_1}\frac{1}{2\sqrt{x^2+d_1^2}}2x + \frac{1}{\upsilon_2}\frac{1}{2\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}2(d-x)(-1)$$

$$= \frac{1}{\upsilon_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+d_1^2}} - \frac{1}{\upsilon_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}$$

iii)

Ο χρόνος $t(x)$ ελαχιστοποιείται όταν

$$t'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\upsilon_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+d_1^2}} - \frac{1}{\upsilon_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+d_2^2}}$$

$$\frac{1}{\upsilon_1}\frac{x}{ΑΓ} - \frac{1}{\upsilon_2}\frac{d-x}{ΓΒ} = 0$$

$$\upsilon_2(\Gamma B)x - \upsilon_1(A\Gamma)(d-x) = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

Από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουμε $A\Gamma = \dfrac{x}{\eta\mu\alpha}$ και $\Gamma B = \dfrac{d-x}{\eta\mu\beta}$

Η (2) $\Leftrightarrow$ $\upsilon_2 \dfrac{d-x}{\eta\mu\beta} x = \upsilon_1 \dfrac{x}{\eta\mu\alpha} (d-x)$

$$\upsilon_2 \eta\mu\alpha = \upsilon_1 \eta\mu\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$