1.3

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 35 – 38

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

(Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στις ασκήσεις 1 – 18)

1.

i) $f(x) = -5$ **ii)** $f(x) = x^4$ **iii)** $f(x) = x^9$

Λύση

i)

$f'(x) = (-5)' = 0$

ii)

$f'(x) = (x^4)' = 4x^3$

iii)

$f'(x) = (x^9)' = 9x^8$

2.

.i) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ **ii)** $f(x) = x^{-3}$ **iii)** $f(x) = x^{-5}$

Λύση

i)

$$f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

ii)

$f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$

iii)

$f'(x) = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$

3.

i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **ii)** $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$, $x>0$

Λύση

i)

$$f\,'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

ii)

$$f(x)=\left(\sqrt[5]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}$$

4.

i) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **ii)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **iii)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x>0$

Λύση

i)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)'=\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$$

ii)

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'=\left(x^{\frac{-1}{3}}\right)'=\frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$$

iii)

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}\right)'=\left(x^{\frac{-2}{5}}\right)'=-\frac{2}{5}x^{\frac{-7}{5}}$$

5.

i) $f(x) = 4x^3$ **ii)** $f(x) = 6x^{-5}$ **iii)** $f(x) = -\frac{2}{5}x^{20}$

Λύση

i)

$(4x^3)' = 12x^2$

ii)

$(6x^{-5})' = -30x^{-6}$

iii)

$$\left(-\frac{2}{5}x^{20}\right)' = -\frac{40}{5}x^{19} = -8x^{19}$$

6.

i) $f(x) = \frac{-6}{\sqrt[4]{x}}$ **ii)** $f(x) = 6x\sqrt{x}$, $x > 0$

Λύση

i)

$$\left(\frac{-6}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \left(\frac{-6}{x^{\frac{1}{4}}}\right)' = \left(-6x^{-\frac{1}{4}}\right)' = \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{4}}$$

ii)

$$\left(6x\sqrt{x}\right)' = \left(6x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(6x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{18}{2}x^{\frac{1}{2}} = 9x^{\frac{1}{2}}$$

7.

i) $f(x) = x^4 + 3x^2$ **ii)** $f(x) = x^2 + 5 + \frac{3}{x}$ **iii)** $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$

Λύση

i)

$f'(x) = (x^4 + 3x^2)' = (x^4)' + (3x^2)' = 4x^3 + 6x$

ii)

$$f'(x) = \left(x^2 + 5 + \frac{3}{x}\right)' = (x^2 + 5 + 3x^{-1})'$$
$$= (x^2)' + (5)' + (3x^{-1})'$$
$$= 2x + 0 - 3x^{-2} = 2x - 3x^{-2}$$

iii)

Για $x \neq 0$: $$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x}\right)' = \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right)'$$
$$= \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right)'$$
$$= \left(x + 2 - x^{-1}\right)'$$
$$= (x)' + (2)' - (x^{-1})' = 1 + 0 + x^{-2} = 1 + x^{-2}.$$

8.

i) $f(x) = 8x^3 - ημx + 5$ **ii)** $f(x) = 6συνx - 8(x^2 + x)$

Λύση

i)

$f'(x) = (8x^3 - ημx + 5)' = (8x^3)' - (ημx)' + (5)' = 24x^2 - συνx$

ii)

$$f'(x) = (6συνx - 8(x^2+x))' = (6συνx - 8x^2 - 8x)'$$
$$= (6συνx)' - (8x^2)' - (8x)'$$
$$= -6ημx - 16x - 8$$

9.

i) $f(x) = (x^3 + 1)(x^4 + 1)$ **ii)** $f(x) = ημx.(1 – συνχ)$

Λύση

i)

Είναι $f(x) = (x^3 + 1)(x^4 + 1) = x^7 + x^4 + x^3 + 1$

Άρα $f'(x) = (x^7 + x^4 + x^3 + 1)' = 7x^6 + 4x^3 + 3x^2$

ii)

Είναι $f(x) = ημx.(1 – συνx) = ημx – ημxσυνx$

Άρα $f'(χ) = (ημx – ημx\,συνx)' = (ημx)' – (ημx\,συνx)'$

$= συνx – [(ημx)'συνx + (συνx)'ημx]$

$= συνx – (συνxσυνx – ημxημx)$

$= συνx – (συν^2x – ημ^2x)$

$= συνx – συν2x$

10.

i) $f(x) = xσυνx + 3(x + 1)(x – 1)$ **ii)** $f(x) = 4x^2ημx – 3x^2συνx$

Λύση

i)

Είναι $f(x) = xσυνx + 3(x + 1)(x – 1) = xσυνx + 3x^2 – 3$

άρα $f'(x) = (xσυνx + 3x^2 – 3)' = (xσυνx)' + (3x^2)' – (3)'$

$= (x)'συνx + x(συνx)' + 6x$

$= συνx – xημx + 6x.$

ii)

$f'(x) = (4x^2ημx – 3x^2συνx)' = (4x^2ημx)' – (3x^2συνx)'$

$= (4x^2)'ημx + 4x^2(ημx)' – (3x^2)'συνx – 3x^2(συνx)'$

$= 8xημx + 4x^2συνx – 6xσυνx + 3x^2ημx$

11.

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ **ii)** $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$ **iii)** $f(x)=\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

i)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x+1)-(x+1)'x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

ii)

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)'=\frac{x'\eta\mu x-x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}=\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

iii)

$$f'(x)=\left(\frac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(x+\eta\mu x)'(1+\sigma\upsilon\nu x)-(1+\sigma\upsilon\nu x)'(x+\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=$$

$$=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x(x+\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x+x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

12.

i) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ **ii)** $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$

Λύση

i)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{-(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

ii)

$$f'(x)=\left(\frac{3}{(x+1)^2}\right)'=\frac{-3\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=\frac{-6(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-6}{(x+1)^3}$$

13.

i) $f(x) = (x-1)^5$ **ii)** $f(x) = (2x+1)^5$ **iii)** $f(x) = (2x^2-3x)^5$

Λύση

i)
$f'(x) = ((x-1)^5)' = 5(x-1)^4(x-1)' = 5(x-1)^4$

ii)
$f'(x) = [(2x+1)^5]' = 5(2x+1)^4(2x+1)' = 5(2x+1)^4\ 2 = 10(2x+1)^4$

iii)
$f'(x) = [(2x^2-3x)^5]' = 5(2x^2-3x)^4(2x^2-3x)' = 5(2x^2-3x)^4(4x-3)$

14.

i) $f(x) = ημ^3x$ **ii)** $f(χ) = ημx^3$ **iii)** $f(x) = xημ4x$ **iv)** $f(x) = εφ3x$

Λύση

i)
$f'(x) = (ημ^3x)' = 3ημ^2x(ημx)' = 3ημ^2xσυνx$

ii)
$f'(x) = (ημx^3)' = συνx^3(x^3)' = 3x^2συνx^3$

iii)
$f'(x) = (xημ4x)' = x'ημ4x + x(ημ4x)' = ημ4x + xσυν4x\cdot(4x)' = ημ4x + 4xσυν4x$

iv)
$$f'(x) = (εφ3x)' = \frac{1}{συν^2 3x}(3x)' = \frac{3}{συν^2 3x}$$

15.

i) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$ **ii)** $f(x) = \sqrt{1+ημx}$

Λύση

i)
$$f'(x) = \left(\sqrt{2x^2-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-x}}(2x^2-x)' = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$$

ii)
$$f'(x) = \left(\sqrt{1+ημx}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+ημx}}(1+ημx)' = \frac{συνx}{2\sqrt{1+ημx}}$$

16.

i) $f(x)=e^{3x}$ **ii)** $f(x)=e^{-x^2}$ **iii)** $f(x)=e^{\alpha x+\beta}$ **iv)** $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$

Λύση

i)

$$f'(x)=(e^{3x})'=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}$$

ii)

$$f'(x)=(e^{-x^2})'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2}$$

iii)

$$f'(x)=(e^{\alpha x+\beta})'=e^{\alpha x+\beta}\cdot(\alpha x+\beta)'=\alpha\cdot e^{\alpha x+\beta}$$

iv)

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+e^{-x})-(e^x+e^{-x})'e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{2e^x\cdot e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

17.

i) $f(x)=\ln 2x$ **ii)** $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^3}$

iii) $f(x)=\ln(\alpha x+\beta)$ **iv)** $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$

Λύση

i)

$$f'(x)=(\ln 2x)'=\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

ii)

$$f'(x)=\left(\ln\frac{1}{x^3}\right)'=\frac{1}{\frac{1}{x^3}}\left(\frac{1}{x^3}\right)'=x^3\frac{-3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x}$$

iii)

$$f'(x)=(\ln(\alpha x+\beta))'=\frac{1}{\alpha x+\beta}(\alpha x+\beta)'=\frac{\alpha}{\alpha x+\beta}$$

iv)

$$f'(x)=(\ln\sqrt{x-1})'=\frac{1}{\sqrt{x-1}}(\sqrt{x-1})'=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot(x-1)'=\frac{1}{2(x-1)}$$

18.

i) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **ii)** $f(x)=e^x \ln x$

Λύση

i)

$$f\,'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-x'\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ii)

$$f'(x)=(e^x\ln x)'=(e^x)'\ln x+(\ln x)'e^x=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$$

19.

i) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1}$, στο σημείο Α(3 , f(3))

ii) Ομοίως της καμπύλης της συνάρτησης $f(\theta)=\dfrac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}$ στο σημείο της $A\left(\dfrac{\pi}{3}, f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

Λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $x_o=3$ είναι $f\,'(3)$.

Όμως
$$f'(t)=\left(\frac{t^3}{t^2+1}\right)'=\frac{(t^3)'(t^2+1)-(t^2+1)'t^3}{(t^2+1)^2}=\frac{3t^2(t^2+1)-2t\cdot t^3}{(t^2+1)^2}=\frac{t^4+3t^2}{(t^2+1)^2}$$

Άρα
$$f\,'(3)=\frac{3^4+3\cdot 3^2}{(3^2+1)^2}=\frac{108}{100}=\frac{27}{25}$$

ii)

$$f'(\theta)=\left(\frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}\right)'=\frac{(\eta\mu\theta)'(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)-(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)'\eta\mu\theta}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=$$
$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)-(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)\eta\mu\theta}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}$$
$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=\frac{1}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}$$

Άρα
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{(\eta\mu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3})^2}=\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}$$

20.

Το βάρος σε γραμμάρια ενός θηλυκού ποντικιού ύστερα από t εβδομάδες δίνεται από τον τύπο $B(t) = 1+\frac{1}{4}(t+2)^2$, όπου $t \leq 8$. Να βρείτε τον ρυθμό ανάπτυξης του ποντικιού i) ύστερα από t εβδομάδες και ii) ύστερα από 1 , 2 και 8 εβδομάδες

Λύση

i)

$$B'(t) = [1+\frac{1}{4}(t+2)^2]' = \frac{1}{4}\cdot 2(t+2)\cdot(t+2)' = \frac{1}{2}(t+2)$$

ii)

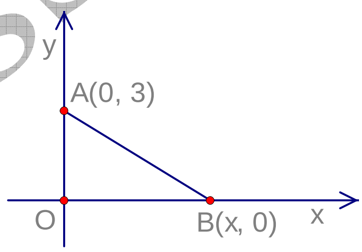
$$B'(1) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$$

$$B'(2) = \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

$$B'(8) = \frac{1}{2}(8+2) = 5$$

21.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(0, 3)$ και $B(x, 0)$ ως προς x, όταν $x = 10$



Λύση

Είναι $(AB) = \sqrt{(x-0)^2+(0-3)^2} = \sqrt{x^2+9}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

Οπότε
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}(x^2+9)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης όταν $x = 10$ είναι $f'(10) = \frac{10}{\sqrt{109}}$

22.

Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x(1-x)$ στο σημείο $O(0, f(0))$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60^o.

Λύση

$f(x) = \alpha x(1-x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \alpha x - \alpha x^2$

Γνωρίζουμε ότι αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση στο σημείο $(x_o, f(x_o))$, με τον άξονα $x'x$, τότε ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = f'(x_o)$

Άρα θα πρέπει $\varepsilon\varphi 60^o = f'(0)$

Όμως $f'(x) = (\alpha x - \alpha x^2)' = \alpha - 2\alpha x$, οπότε $f'(0) = \alpha$.

Άρα θα πρέπει $\varepsilon\varphi 60^o = f'(0) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \alpha$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 3x + 5$;

Λύση

Αν $(x, f(x))$ είναι το σημείο επαφής, για να είναι η εφαπτομένη σ' αυτό παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 5$, θα πρέπει $f'(x) = 3$.

Όμως $f'(x) = \left(\dfrac{3x}{x+1}\right)' = \dfrac{(3x)'(x+1)-(x+1)'(3x)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{3(x+1)-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Άρα πρέπει $\dfrac{3}{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1$

$x + 1 = 1$ ή $x + 1 = -1$

$x = 0$ ή $x = -2$

Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0, f(0))$ και $B(-2, f(-2))$.

$A(0, 0)$ και $B(-2, 6)$

2.

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$,

στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$.

Λύση

Αν $(x , f(x))$ είναι τα σημεία επαφής , για να είναι οι εφαπτομένες σ'αυτά παράλληλες στον $x'x$, θα πρέπει

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(1,\ f(1))$ και $B(3,\ f(3))$

$A(1, 8)$ και $B(3,\ 4)$

3.

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

Λύση

Η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι η ευθεία $y = x$, της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με 1.

Αν $(x , f(x))$ είναι τα ζητούμενα σημεία τότε θα πρέπει να ισχύει

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)' = 1$$

$$\frac{x'(x+1)-(x+1)'x}{(x+1)^2} = 1$$

$$\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = 1$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \text{ ή } x + 1 = -1$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -2$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0 , f(0))$ και $B(-2 , f(-2))$

$A(0, 0)$ και $B(-2, 2)$

4.

Ένα σώμα κινείται σ' έναν άξονα έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$. Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t και να προσδιορίσετε πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές ;

Λύση

Η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 2t^2 + t)' = 3t^2 - 4t + 1$

Το σώμα είναι ακίνητο όταν $\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0$

$$t = 1 \quad ή \quad t = \frac{1}{3}$$

Η επιτάχυνση είναι $\alpha(t) = \upsilon'(t) = (3t^2 - 4t + 1)' = 6t - 4$

Για $t = 1$ είναι $\alpha(1) = 6 - 4 = 2$ και

για $t = \frac{1}{3}$ είναι $\alpha(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2$

5.

Αν $f(x) = Α\text{συν}\omega x + Β\text{ημ}\omega x$, δείξτε ότι $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$

Λύση

Έχουμε ότι $f'(x) = (Α\text{συν}\omega x + Β\text{ημ}\omega x)'$

$$= -Α\text{ημ}\omega x\,(\omega x)' + Β\text{συν}\omega x\,(\omega x)'$$

$$= -Α\omega\,\text{ημ}\omega x + Β\omega\,\text{συν}\omega x$$

Οπότε $f''(x) = (-Α\omega\,\text{ημ}\omega x + Β\omega\,\text{συν}\omega x)'$

$$= -Α\omega\,\text{συν}\omega x\,(\omega x)' - Β\omega\,\text{ημ}\omega x\,(\omega x)'$$

$$= -Α\omega^2\,\text{συν}\omega x - Β\omega^2\,\text{ημ}\omega x$$

Επομένως $f''(x) + \omega^2 f(x) = -Α\omega^2\,\text{συν}\omega x - Β\omega^2\,\text{ημ}\omega x + \omega^2(Α\text{συν}\omega x + β\text{ημ}\omega x)$

$$= -Α\omega^2\,\text{συν}\omega x - Β\omega^2\,\text{ημ}\omega x + Α\omega^2\,\text{συν}\omega x + Β\omega^2\,\text{ημ}\omega x$$

$$= 0$$

6.

Αν $f(x) = \alpha e^{px} + \beta e^{-px}$, να δείξετε ότι $f''(x) = p^2 f(x)$

Λύση

$f'(x) = (\alpha e^{px} + \beta e^{-px})' = \alpha p e^{px} - \beta p e^{-px}$

$f''(x) = (\alpha p e^{px} - \beta p e^{-px})'$

$$= \alpha p^2 e^{px} + \beta p^2 e^{-px}$$

$$= p^2(\alpha e^{px} + \beta e^{-px}) = p^2 f(x)$$

7.

Αν $f(x)=e^{\mu\chi}$, να βρείτε το μ ώστε να ισχύει $f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0$

Λύση

$f'(x) = (e^{\mu x})' = \mu e^{\mu x}$

$f''(x) = (\mu e^{\mu x})' = \mu^2 e^{\mu x}$

Οπότε $f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \mu^2 e^{\mu x} - 3\mu e^{\mu x} - 4e^{\mu x} = 0$

$e^{\mu x}(\mu^2 - 3\mu - 4) = 0$

$\mu^2 - 3\mu - 4 = 0$

$\mu = 4$ ή $\mu = -1$

8.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο $x = \frac{\pi}{3}$

Λύση

Η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι $y - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **(1)**

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = (2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)' = 2(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x + 2(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - 2\eta\mu^2\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{6}{4} = -1$

Η (1) γίνεται $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -1\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

9.

Ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο

$P(I)=\dfrac{I}{\alpha+\beta\cdot I}$, $I\geq 0$, όπου I η ένταση του φωτός και α, β σταθερές

i) Να βρείτε την $P'(I)$ ή όπως αλλιώς λέγεται , τη φωτοχημική ικανότητα του φυτού και την $P'(0)$

ii) Να δείξετε ότι $P'(I)=\dfrac{1}{\alpha}[1-\beta\cdot P(I)]^2$

Λύση

i)

$$P'(I)=\left(\frac{I}{\alpha+\beta\cdot I}\right)'=\frac{I'(\alpha+\beta\cdot I)-(\alpha+\beta\cdot I)'\cdot I}{(\alpha+\beta\cdot I)^2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta\cdot I-\beta\cdot I}{(\alpha+\beta\cdot I)^2}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta\cdot I)^2}$$

$$P'(0)=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta\cdot 0)^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}$$

ii)

$$\frac{1}{\alpha}[1-\beta\cdot P(I)]^2=\frac{1}{\alpha}[1-\beta\cdot\frac{I}{\alpha+\beta\cdot I}]^2$$

$$=\frac{1}{\alpha}[\frac{\alpha+\beta\cdot I-\beta\cdot I}{\alpha+\beta\cdot I}]^2$$

$$=\frac{1}{\alpha}[\frac{\alpha}{\alpha+\beta\cdot I}]^2$$

$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{[\alpha+\beta\cdot I]^2}=\frac{\alpha}{[\alpha+\beta\cdot I]^2}=P'(I)$$

10.

Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σ' έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $y(t) = Αημωt$, όπου t ο χρόνος και Α ,ω σταθερές .

i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t

ii) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y

iii) Να δείξετε ότι όταν η επιτάχυνση είναι 0, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο

Λύση

i)

Η ταχύτητα είναι $υ(t) = y'(t) = (Αημωt)'$

$= Ασυνωt .(ωt)'$

$= Ασυνωt .ω = Αω\, συνωt$

και η επιτάχυνση είναι $α(t) = υ'(t) = (Αωσυνωt)'$

$= -Αω\, ημωt . (ωt)'$

$= -Αω\, ημωt . ω$

$= -Αω^2 ημωt$

ii)

Επειδή $α(t) = -Αω^2ημωt = -\, ω^2(Αημωt) = -\, ω^2y(t)$ αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y

iii)

Η επιτάχυνση $α(t) = -Αω^2ημωt$ είναι ίση με το 0 όταν

$ημωt = 0$, τότε όμως $συνωt =1$ ή $συνωt = -1$.

Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$|υ(t)| = |Αωσυνωt| = |Αω|\,|συνωt| \leq |Αω|\,1 = |Αω|$

Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο όταν $|συνωt| =1 \Leftrightarrow$

$συνωt = \pm 1 \Leftrightarrow$

$α(t)=0$.