4.1
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 139 – 140

Α΄ Ομάδας

1.i)
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο ν ισχύει

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ισότητα ισχύει για $\nu = 1$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

$1 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 1 :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} \qquad \mathbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{(\nu+1)(\nu+1+1)[2(\nu+1)+1]}{6}$$ δηλαδή ότι

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6}$$

$$(1) \Rightarrow \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + (\nu+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1) + 6(\nu+1)^2}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{(\nu+1)[\nu(2\nu+1) + 6(\nu+1)]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{(\nu+1)(2\nu^2 + \nu + 6\nu + 6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{(\nu+1)(2\nu^2 + 7\nu + 6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 + (\nu+1)^2 = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6}$$

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

1.ii)

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο ν ισχύει

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ισότητα ισχύει για $\nu=1$: $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

$1=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο >1 :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 \quad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu+1$, δηλαδή ότι

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3+(\nu+1)^3=\left(\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\right)^2$$

$$(1)\quad\Rightarrow\quad 1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3+(\nu+1)^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2+(\nu+1)^3$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3+(\nu+1)^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2+4(\nu+1)^3}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3+(\nu+1)^3=\frac{(\nu+1)^2(\nu^2+4\nu+4)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3+(\nu+1)^3=\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3+(\nu+1)^3=\left(\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\right)^2$$

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

1.iii)

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο ν ισχύει

$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot 4 + \ . \ . \ . \ + \nu(\nu+1) = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ισότητα ισχύει για $\nu = 1$: $1\cdot2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$2 = \dfrac{2\cdot3}{3}$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 1 :

$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ . \ . \ . \ + \nu(\nu+1) = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ . \ . \ . \ + \nu(\nu+1) + (\nu+1)(\nu+2) = \dfrac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}$

(1) $\Rightarrow$ $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ . \ . \ . \ + (\nu+1)(\nu+2) = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3} + (\nu+1)(\nu+2)$

$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ . \ . \ . \ + (\nu+1)(\nu+2) = (\nu+1)(\nu+2)\left(\dfrac{\nu}{3}+1\right)$

$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ . \ . \ . \ + (\nu+1)(\nu+2) = (\nu+1)(\nu+2)\dfrac{\nu+3}{3}$

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

1.iv)
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο ν ισχύει

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}$$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ισότητα ισχύει για $\nu = 1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο >1 :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1} \quad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu+1}{\nu+2}$$

$$(1)\ \Rightarrow\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu(\nu+2)+1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu^2+2\nu+1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{(\nu+1)^2}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu+1}{\nu+2}$$

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

2.
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο ν ισχύει

$$1+x+x^2+\ .\ .\ .\ +x^{\nu-1}=\frac{x^{\nu}-1}{x-1}, \quad \text{εφόσον } x\neq 0$$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ισότητα ισχύει για $\nu = 1$: $1=\frac{x-1}{x-1}$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο >1 :

$$1+x+x^2+\ .\ .\ .\ +x^{\nu-1}=\frac{x^{\nu}-1}{x-1} \quad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$$1+x+x^2+\ .\ .\ .\ +x^{\nu-1}+x^{\nu}=\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$$

$$(1)\ \Rightarrow\ 1+x+x^2+\ .\ .\ .\ +x^{\nu-1}+x^{\nu}=\frac{x^{\nu}-1}{x-1}+x^{\nu}$$

$$1+x+x^2+\ .\ .\ .\ +x^{\nu-1}+x^{\nu}=\frac{x^{\nu}-1+x^{\nu+1}-x^{\nu}}{x-1}$$

$$1 + x + x^2 + \ . \ . \ . \ + x^{\nu-1} + x^{\nu} = \frac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}$$

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

3.i)

Να αποδείξετε ότι $\nu^2 > 2\nu + 1$ για κάθε $\nu \geq 3$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ανισότητα ισχύει για $\nu = 3$: $3^2 > 2.3 + 1$

$9 > 7$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 3 :

$\nu^2 > 2\nu + 1$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$(\nu + 1)^2 > 2(\nu + 1) + 1$ ή ότι

$\nu^2 + 2\nu + 1 > 2\nu + 2 + 1$ ή ότι

$\nu^2 > 2$ ή ότι $\nu > \sqrt{2}$ που ισχύει, αφού $\nu \geq 3$

Άρα για κάθε $\nu \geq 3$ ισχύει το ζητούμενο

3.ii)

Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{4}{3}\right)^{\nu} > \nu$ για κάθε $\nu \geq 7$

Λύση

Η αποδεικτέα γράφεται $\frac{4^{\nu}}{3^{\nu}} > \nu \iff 4^{\nu} > \nu 3^{\nu}$

Ελέγχουμε αν η ανισότητα ισχύει για $\nu = 7$: $4^7 > 7.\ 3^7$

$16384 > 15309$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 7 :

$4^{\nu} > \nu 3^{\nu}$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$4^{\nu+1} > (\nu + 1)3^{\nu+1}$ **(A)**

(1) $\Rightarrow$ $4^{\nu} \cdot 4 > \nu 3^{\nu} \cdot 4$ $\Rightarrow$ $4^{\nu+1} > 4\nu 3^{\nu}$ **(2)**

Θέλοντας να αποδείξουμε την (A), με βάση τη (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$4\nu 3^{\nu} > (\nu + 1)3^{\nu+1}$ ή ότι $4\nu 3^{\nu} > (\nu + 1)3.\ 3^{\nu}$

$4\nu > 3\nu + 3$

$\nu > 3$ που ισχύει, αφού $\nu \geq 7$

Άρα για κάθε $\nu \geq 7$ ισχύει το ζητούμενο

3.iii)

Να αποδείξετε ότι $5^{\nu} > 5\nu - 1$ για κάθε θετικό ακέριο ν.

Λύση

Ελέγχουμε αν η ανισότητα ισχύει για $\nu = 1$: $5 > 5\cdot 1 - 1$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 1 :

$5^{\nu} > 5\nu - 1$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$5^{\nu+1} > 5(\nu + 1) - 1$ ή ότι

$5.\ 5^{\nu} > 5\nu + 5 - 1$ ή ότι

$5.\ 5^{\nu} > 5\nu + 4$ **(A)**

(1) $\Rightarrow$ $5\cdot 5^{\nu} > 5(5\nu - 1)$ **(2)**

Θέλοντας να αποδείξουμε την (A), με βάση τη (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$5(5\nu - 1) > 5\nu + 4$ ή ότι

$25\nu - 5 > 5\nu + 4$ ή ότι

$20\nu > 9$ ή ότι

$\nu > \frac{9}{20}$ που ισχύει

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο $\nu \geq 4$ ισχύει

$\nu! > 2^{\nu}$, όπου $\nu! = 1.2.3 \ldots \nu$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ανισότητα ισχύει για $\nu = 4$: $4! > 2^4$

$1\cdot2\cdot3\cdot4 > 16$

$24 > 16$ που ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 4: $\nu! > 2^{\nu}$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι $(\nu + 1)! > 2^{\nu+1}$

Είναι $(\nu + 1)! = 1\cdot2\cdot3 \ldots \nu\cdot(\nu + 1) =$

$$= \nu!(\nu + 1) \overset{(1)}{>} 2^{\nu}(\nu + 1) > 2^{\nu}(1 + 1) = 2^{\nu}2 = 2^{\nu+1}$$

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 4$ ισχύει το ζητούμενο

2.

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο ν ισχύει

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} \leq 2 - \frac{1}{\nu}$$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ανισότητα ισχύει για $\nu = 1$: $\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$ ισχύει σαν ισότητα.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 1:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} \leq 2 - \frac{1}{\nu} \quad \textbf{(1)}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{(\nu+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{\nu+1} \quad \textbf{(A)}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{(\nu+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{(\nu+1)^2} \quad \textbf{(2)}$$

Θέλοντας να αποδείξουμε την (Α), με βάση τη (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$2 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{(\nu+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{\nu+1}$ ή ότι

$\frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{\nu+1} \leq \frac{1}{\nu}$ ή ότι

$\nu + \nu(\nu + 1) \leq (\nu + 1)^2$ ή ότι

$\nu + \nu^2 + \nu \leq \nu^2 + 2\nu + 1$ ή ότι $0 \leq 1$ που ισχύει

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει το ζητούμενο

3.

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέριο $\nu \geq 3$ ισχύει $\nu^{\nu+1} > (\nu+1)^{\nu}$

Λύση

Ελέγχουμε αν η ανισότητα ισχύει για $\nu = 3$: $3^{3+1} > (3+1)^3$

$$3^4 > 4^3$$

$81 > 64$ που ισχύει

Η αποδεικτέα γράφεται $\nu^{\nu}\nu > (\nu+1)^{\nu}$

$$\nu > \frac{(\nu+1)^{\nu}}{\nu^{\nu}}$$

$$\nu > \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu}$$

$$\nu > \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < \nu$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο > 3 : $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < \nu$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι $\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} < \nu+1$

Είναι $\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right) \overset{(1)}{<} \nu\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right) \overset{(*)}{<} \nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right) =$

$$= \nu\,\frac{\nu+1}{\nu} = \nu+1$$

∗ Μικραίνουμε τον παρανομαστή (από $\nu + 1$ σε ν) οπότε μεγαλώνει το κλάσμα.

Άρα για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 3$ ισχύει το ζητούμενο