8.1 – 8.2

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ορισμός
Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

2.
Λόγος ομοιότητας δύο ομοίων σχημάτων
Λέγεται ο λόγος δύο ομολόγων πλευρών

3.
Θεώρημα
Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

4.
1ο Κριτήριο Ομοιότητας Τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια

Πορίσματα
i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν
- **α)** τη γωνία των ίσων πλευρών τους ίση
- **β)** μία από τις γωνίες των βάσεών τους ίση.

5.
2ο Κριτήριο Ομοιότητας Τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση και τις πλευρές αυτών των γωνιών ανάλογες, τότε είναι όμοια.

6.
3ο Κριτήριο Ομοιότητας Τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

7.

Πόρισμα

Ο λόγος ομοιότητας δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων

i) υψών τους

ii) διχοτόμων τους

iii) διαμέσων τους

8.

Εφαρμογή

Τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

9.

Εφαρμογή

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\beta\gamma = 2R\,\upsilon_\alpha$

και κυκλικά $\gamma\alpha = 2R\,\upsilon_\beta$

$\alpha\beta = 2R\,\upsilon_\gamma$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Από τα ίσα στα όμοια

Τα ίσα ευθ.σχήματα είναι όμοια. **Προσοχή** όχι αντίστροφα

Ο λόγος ομοιότητας δύο ίσων ευθ.σχημάτων είναι 1.

2.

Η μεταβατική ιδιότητα

Αν $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$ και $\Sigma_2 \approx \Sigma_3$ τότε $\Sigma_1 \approx \Sigma_3$

3.

Σε δύο όμοια τρίγωνα

Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι των ίσων γωνιών.

Οι ίσες γωνίες βρίσκονται απέναντι των ομολόγων πλευρών.

4.

Σε δύο όμοια τρίγωνα

Ισχύει $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{\rho}{\rho'}$ = λόγος ομοιότητας

5.

Μέθοδος

- Για να αποδείξουμε ισότητα της μορφής $\alpha\beta = \gamma\delta$, τη μετατρέπουμε σε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta}$
- Για να αποδείξουμε ισότητα της μορφής $\alpha^2 = \beta\gamma$, τη μετατρέπουμε σε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

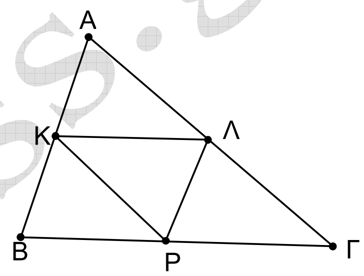
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΓ. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

Προτεινόμενη λύση

Έστω Κ, Λ, Ρ τα μέσα των πλευρών του τρ. ΑΒΓ



$K\Lambda = \frac{1}{2}B\Gamma \Leftrightarrow \frac{K\Lambda}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$

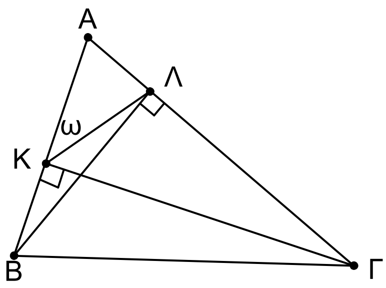
Ομοίως $\frac{KP}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$ και $\frac{\Lambda P}{AB} = \frac{1}{2}$

Άρα $\frac{K\Lambda}{B\Gamma} = \frac{KP}{A\Gamma} = \frac{\Lambda P}{AB}$ οπότε $\triangle AB\Gamma \approx \triangle K\Lambda P$ με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{K\Lambda}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$

2.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΓΚ, ΒΛ ύψη του. Να αποδείξτε ότι $\triangle AB\Gamma \approx \triangle AK\Lambda$ και στην συνέχεια να γράψετε την αναλογία των ομολόγων πλευρών των τριγώνων.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή $B\hat{K}\Gamma = 90^o = B\hat{\Lambda}\Gamma$, το τετράπλευρο ΚΛΓΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Άρα $A\hat{\Gamma}B = \hat{\omega}$

Οπότε τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΒΓ είναι όμοια,

αφού έχουν $A\hat{\Gamma}B = \hat{\omega}$ και $\hat{A} =$ κοινή.

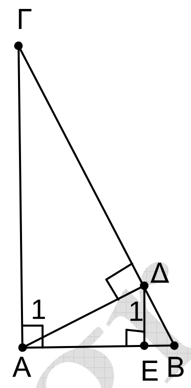
Άρα $\frac{AB}{A\Lambda} = \frac{B\Gamma}{K\Lambda} = \frac{A\Gamma}{AK}$

(απέναντι από τις ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές)

3.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^o$) φέρουμε $A\Delta \perp B\Gamma$ και $\Delta E \perp AB$.
Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$

Προτεινόμενη λύση



Η προς απόδειξη σχέση γράφεται $\dfrac{A\Delta}{A\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{A\Delta}$

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\triangle A\Gamma\Delta \approx \triangle A\Delta E$

Πράγματι

Οι $A\Gamma$ και ΔE είναι κάθετες στην AB,

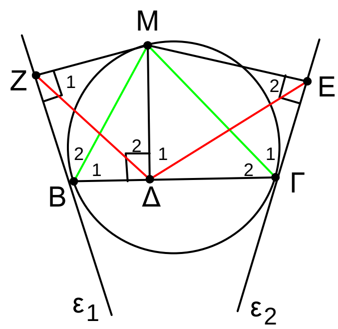
άρα $A\Gamma \,//\, \Delta E$, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ

Ακόμα $A\widehat{\Delta}\Gamma = \Delta\widehat{E}A = 90^o$ άρα τα τρίγωνα είναι όμοια

4.

Να αποδείξετε ότι η απόσταση κάθε σημείου Μ ενός κύκλου από μία χορδή είναι μέση ανάλογος των αποστάσεων του Μ από τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της χορδής

Προτεινόμενη λύση



Έστω $M\Delta$, MZ και ME οι αποστάσεις του Μ από τη χορδή $B\Gamma$ και τις εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα σημεία Β και Γ του κύκλου.

Θα αποδείξουμε ότι $\dfrac{M\Delta}{ME} = \dfrac{MZ}{M\Delta}$

Προς τούτο ότι $\triangle M\Delta Z \approx \triangle M\Delta E$

Φέρω τα τμήματα MB, $M\Gamma$, ΔZ, ΔE

$M\widehat{Z}B + M\widehat{\Delta}B = 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$ $M\Delta BZ$ εγγράψιμο σε κύκλο $\Rightarrow \widehat{Z}_1 = \widehat{B}_1$

$M\widehat{E}\Gamma + M\widehat{\Delta}\Gamma = 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$ $M\Delta\Gamma E$ εγγράψιμο σε κύκλο $\Rightarrow \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$

Αλλά $\widehat{B}_1$ εγγεγραμμένη και $\widehat{\Gamma}_1$ υπό χορδής και εφαπτομένης $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$

Άρα $\widehat{Z}_1 = \widehat{\Delta}_1$

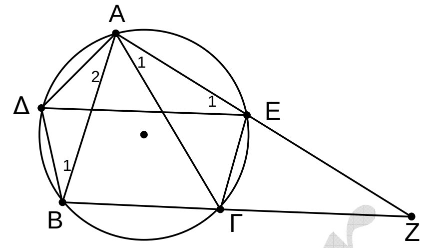
Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\widehat{E}_2 = \widehat{\Delta}_2$

Τα τρίγωνα λοιπόν $M\Delta Z$ και $M\Delta E$ αφού έχουν δύο γωνίες ίσες είναι όμοια

5.

Θεωρούμε χορδή ΔΕ του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ παράλληλη στη ΒΓ. Αν η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΔ· ΑΖ = ΑΒ· ΑΓ

Προτεινόμενη λύση



Η ζητούμενη σχέση γράφεται $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΖ}$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$\triangle ΑΔΒ \approx \triangle ΑΓΖ$

$ΔΕ \parallel ΒΓ \Rightarrow \overset{\frown}{ΔΒ} = \overset{\frown}{ΕΓ} \Rightarrow \hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$

$\hat{Β}_1 = \hat{Ε}_1$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{Ε}_1 = \hat{Ζ}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

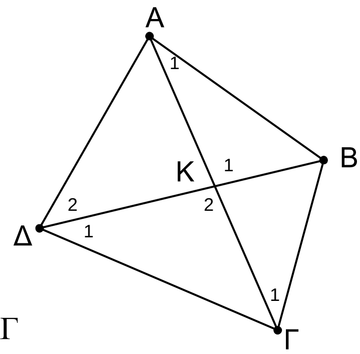
Άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Ζ}$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΖ έχουν $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ και $\hat{Β}_1 = \hat{Ζ}$, άρα είναι όμοια.

6.

Έστω Κ το σημείο τομής των διαγωνίων ενός εγγράψιμου τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
Να αποδείξετε ότι ΑΒ· ΑΔ· ΚΓ= ΒΓ· ΓΔ · ΚΑ

Προτεινόμενη λύση



Επειδή το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_1$.

Ακόμα $\hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2$ ως κατακορυφήν

Άρα $\triangle ΑΚΒ \approx \triangle ΓΚΔ \Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ}$

ΑΒ· ΚΓ = ΓΔ· ΚΒ **(1)**

Ομοίως από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΚ και ΒΚΓ

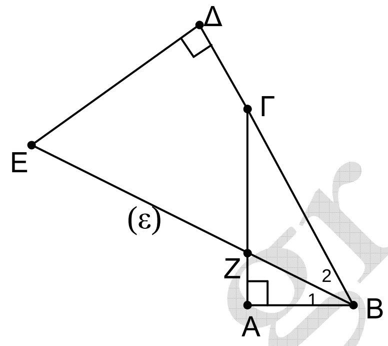
έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{ΑΚ}{ΚΒ} \Leftrightarrow$ ΑΔ·ΚΒ =ΒΓ·ΑΚ **(2)**

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε ΑΒ· ΑΔ· ΚΓ= ΒΓ· ΓΔ · ΚΑ

7.

Στην προέκταση της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΒ και από το Δ φέρνουμε ευθεία (ε) κάθετη στη ΒΔ στο Δ . Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την (ε) στο Ε και την ΑΓ στο Ζ . Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΓ

Προτεινόμενη λύση



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΒΕ,

επειδή έχουν $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, είναι όμοια.

Άρα $\dfrac{\text{ΕΔ}}{\text{ΑΖ}} = \dfrac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} \Leftrightarrow \text{ΕΔ} = \dfrac{\text{ΑΖ}\cdot\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}$

Όμως ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ = ΒΓ + ΑΒ,

άρα $\text{ΕΔ} = \dfrac{\text{ΑΖ}\cdot(\text{ΒΓ}+\text{ΑΒ})}{\text{ΑΒ}}$ **(1)**

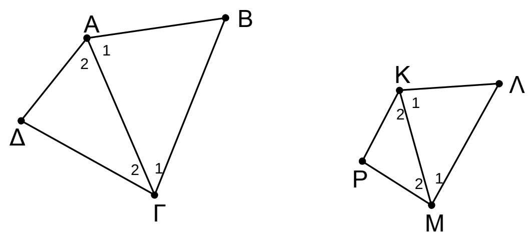
Επειδή ΒΖ εσωτερική διχοτόμος, είναι $\text{ΑΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}}$

Οπότε η (1) γίνεται $\text{ΕΔ} = \dfrac{\dfrac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}}\cdot(\text{ΒΓ}+\text{ΑΒ})}{\text{ΑΒ}} = \text{ΑΓ}$

8.

Θεωρούμε δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΡ, τέτοια ώστε
$\dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΚΛ}} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΛΜ}} = \dfrac{\text{ΓΔ}}{\text{ΜΡ}} = \dfrac{\text{ΔΑ}}{\text{ΡΚ}} = \lambda$ και $\dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΜ}} = \lambda$.
Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

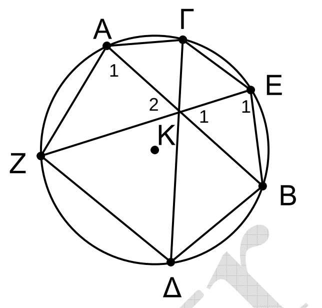


Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν
$\dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΚΛ}} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΛΜ}} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΜ}}$ άρα είναι όμοια,
οπότε θα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες.
Επομένως $\hat{A}_1 = \hat{K}_1$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{M}_1$, και $\hat{B} = \hat{\Lambda}$
Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΓ και ΚΡΜ
προκύπτει ότι $\hat{A}_2 = \hat{K}_2$, $\hat{\Gamma}_2 = \hat{M}_2$ και $\hat{\Delta} = \hat{P}$.
Επομένως τα δύο τετράπλευρα έχουν και τις ομόλογες γωνίες τους ίσες άρα είναι όμοια.

9.

Τρείς χορδές ΑΒ , ΓΔ και ΕΖ ενός κύκλου διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ .
Να αποδείξετε ότι ΑΓ· ΒΕ· ΔΖ = ΑΖ· ΒΔ· ΓΕ

Προτεινόμενη λύση



Επειδή $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ σαν εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, και $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$ ως κατακορυφήν, τα τρίγωνα ΑΖΚ και ΕΚΒ είναι όμοια, άρα $\frac{EB}{AZ} = \frac{KE}{KA}$ **(1)**

Ομοίως από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΑ Γ και ΚΔ Β, καθώς επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΚΕ και ΚΖΔ έχουμε $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{KA}{K\Delta}$ **(2)**

$\frac{\Delta Z}{\Gamma E} = \frac{K\Delta}{KE}$ **(3)**

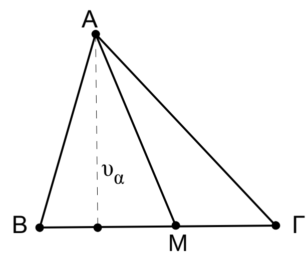
Πολλαπλασιάζουμε τις (1) , (2), (3) κατά μέλη $\frac{EB \cdot A\Gamma \cdot \Delta Z}{AZ \cdot B\Delta \cdot \Gamma E} = \frac{KE \cdot KA \cdot K\Delta}{KA \cdot K\Delta \cdot KE} = 1$

ΑΓ· ΒΕ· ΔΖ = ΑΖ· ΒΔ· ΓΕ

10.

Σημείο Μ κινείται στην πλευρά ΒΓ σταθερού τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των ακτίνων των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΜΒ, ΑΜΓ είναι σταθερός .

Προτεινόμενη λύση



Από εφαρμογή γνωρίζουμε ότι $\beta\gamma = 2R\,\upsilon_\alpha$ **(1)**

Έστω R_1, R_2 οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΜΒ, ΑΜΓ αντίστοιχα.

Η (1) στο τρ.ΑΒΜ $\Rightarrow$ $\gamma \cdot AM = 2R_1\upsilon_\alpha$ **(2)**

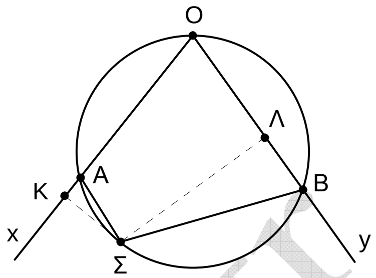
Η (1) στο τρ.ΑΜΓ $\Rightarrow$ $\beta \cdot AM = 2R_2\upsilon_\alpha$ **(3)**

$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\gamma}{\beta}$ = σταθερός

11.

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Σ στο εσωτερικό της. Τυχαίος κύκλος διέρχεται από τα σημεία Ο, Σ και τέμνει τις Οx, Oy σε σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\dfrac{ΣΑ}{ΣΒ}$ είναι σταθερός.

Προτεινόμενη λύση



Φέρνουμε $ΣΚ \perp Οx$ και $ΣΛ \perp Οy$, οι οποίες είναι σταθερές δηλαδή ανεξάρτητες από τον κύκλο

ΟΑΣΒ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{A}_{εξ} = \hat{B}$

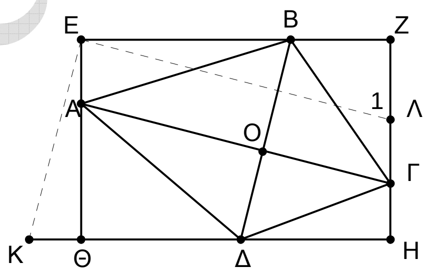
Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΣΚΑ και ΣΛΒ είναι όμοια.

Άρα $\dfrac{ΣΑ}{ΣΒ} = \dfrac{ΣΚ}{ΣΛ} =$ σταθερός

12.

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κάθετες διαγωνίους. Να αποδείξετε ότι κάθε ορθογώνιο περιγεγραμμένο στο τετράπλευρο παραμένει όμοιο στον εαυτό του.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή το ορθογώνιο διατηρεί τις γωνίες του ίσες (ορθές), αρκεί να αποδείξουμε ότι ο λόγος των διαστάσεών του παραμένει σταθερός.
Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ το περιγεγραμμένο ορθογώνιο.

Φέρνουμε ΕΚ//ΒΔ $\Rightarrow$ $\hat{K} = O\hat{Δ}H$ **(1)**

Ακόμα ΕΛ//ΑΓ $\Rightarrow$ $\hat{Λ}_1 = O\hat{Γ}Λ$ **(2)**

Αλλά $\hat{O} + \hat{H} = 180^o$ $\Rightarrow$

ΟΔΗΓ εγγράψιμο $\Rightarrow$

$O\hat{Δ}H = O\hat{Γ}Λ$ **(3)**

Από τις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $\hat{K} = \hat{Λ}_1$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΘΚ , ΕΖΛ είναι όμοια $\Rightarrow$ $\dfrac{ΕΖ}{ΕΘ} = \dfrac{ΕΛ}{ΕΚ}$ **(4)**

Αλλά ΕΛΓΑ παρ/μμο $\Rightarrow$ ΕΛ = ΑΓ

Και ΕΒΔΚ παρ/μμο $\Rightarrow$ ΕΚ = ΒΔ

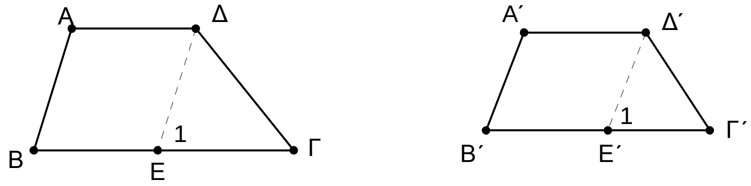
Η (4) γίνεται $\dfrac{ΕΖ}{ΕΘ} = \dfrac{ΑΓ}{ΒΔ} =$ σταθερός

13.

Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες πλευρές είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τραπέζια έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες μία προς μία.



Έστω τα τραπέζια ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\dfrac{\Delta A}{\Delta' A'}=\lambda$ **(1)**

Φέρνουμε ΔΕ//ΑΒ και Δ΄Ε΄//Α΄Β΄

ΑΒΕΔ παρ/μμο $\Rightarrow$ ΑΒ = ΔΕ και ΑΔ = ΒΕ

Α΄Β΄Ε΄Δ΄ παρ/μμο $\Rightarrow$ Α΄Β΄ = Δ΄Ε΄ και Α΄Δ΄ = Β΄Ε΄

Από την (1) παίρνουμε $\lambda=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{\Delta E}{\Delta' E'}$

Από την (1) παίρνουμε $\lambda=\dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$

Από την (1) παίρνουμε $\lambda=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{\Delta A}{\Delta' A'}=\dfrac{BE}{B'E'}=\dfrac{B\Gamma-BE}{B'\Gamma'-B'E'}=\dfrac{E\Gamma}{E'\Gamma'}$

Δηλαδή τα τρίγωνα ΔΕΓ και Δ΄Ε΄Γ΄ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, άρα είναι όμοια. Οπότε $\hat{E}_1=\hat{E}'_1$ **(2)** και $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$

Όμως ΔΕ//ΑΒ $\Rightarrow$ $\hat{E}_1=\hat{B}$

Και Δ΄Ε΄//Α΄Β΄ $\Rightarrow$ $\hat{E}'_1=\hat{B}'$

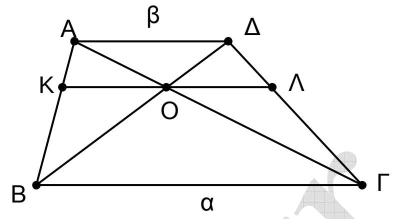
Η (2) γίνεται $\hat{B}=\hat{B}'$

Τέλος είναι $\hat{A}=\hat{A}'$ και $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}'$ σαν παραπληρώματα ίσων.

14.

Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = α και ΔΓ = β. Από το σημείο τομής των διαγωνίων Ο, φέρνουμε παράλληλη στις βάσεις που τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές στα σημεία Κ, Λ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΚΛ συναρτήσει των α, β.

Προτεινόμενη λύση



$$\text{τρ.ΟΒΓ} \approx \text{τρ.ΟΑΔ} \Rightarrow \frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{β}{α}$$

$$\frac{ΟΔ}{ΟΒ + ΟΔ} = \frac{β}{α + β}$$

$$\frac{ΔΟ}{ΔΒ} = \frac{β}{α + β}$$

$$\text{τρ.ΔΟΛ} \approx \text{τρ.ΔΒΓ} \Rightarrow \frac{ΟΛ}{ΒΓ} = \frac{ΔΟ}{ΔΒ}$$

$$\frac{ΟΛ}{α} = \frac{β}{α + β}$$

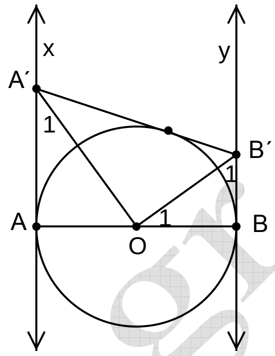
$$ΟΛ = \frac{αβ}{α + β}$$

Ομοίως $ΟΚ = \dfrac{αβ}{α + β}$ και τελικά $ΚΛ = \dfrac{2αβ}{α + β}$

15.

Δίνεται κύκλος (O, R), διάμετρός του AB και οι εφαπτόμενες Ax, By.
Η τυχαία άλλη εφαπτομένη του κύκλου τέμνει την Ax σε σημείο A' και την By σε σημείο B'. Να αποδείξετε ότι $AA' \cdot BB' = R^2$.

Προτεινόμενη λύση



Φέρνουμε τις $A'O$, $B'O$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{AA'}{R} = \dfrac{R}{BB'}$

$\dfrac{AA'}{OA} = \dfrac{OB}{BB'}$

τρ. $AOA' \approx$ τρ. BOB'

και αφού είναι ορθογώνια, αρκεί $\hat{A}'_1 = \hat{O}_1$

$ABB'A'$ τραπέζιο $\Rightarrow$ $\hat{A}' + \hat{B}' = 180^o$

Αλλά η $A'O$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}'$

και η $B'O$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}'$

Οπότε $2\hat{A}'_1 + 2\hat{B}'_1 = 180^o \Rightarrow \hat{A}'_1 + \hat{B}'_1 = 90^o$

Όμως, από το ορθογώνιο τρίγωνο BOB', είναι $\hat{O}_1 + \hat{B}'_1 = 90^o$

Άρα $\hat{A}'_1 = \hat{O}_1$