ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (Δ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 193 – 194

1.

Να λύσετε την η εξίσωση $ημ^2x - 2\sqrt{3}\,ημxσυνx - συν^2x = -\sqrt{3}$

Λύση

$$ημ^2x - 2\sqrt{3}\,ημxσυνx - συν^2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$ημ^2x - 2\sqrt{3}\,ημxσυνx - συν^2x = -\sqrt{3}\,(ημ^2x + συν^2x)$$

$$ημ^2x - 2\sqrt{3}\,ημxσυνx - συν^2x + \sqrt{3}\,ημ^2x + \sqrt{3}\,συν^2x = 0$$

$$(1+\sqrt{3})ημ^2x - 2\sqrt{3}\,ημxσυνx + (\sqrt{3}-1)συν^2x = 0$$

Αν $συνx = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $(1+\sqrt{3})ημ^2x = 0 \Leftrightarrow ημx = 0$ που είναι αδύνατη

Αν $συνx \neq 0$ τότε η εξίσωση γίνεται

$$\frac{(1+\sqrt{3})ημ^2x}{συν^2x} - \frac{2\sqrt{3}ημxσυνx}{συν^2x} + \frac{(\sqrt{3}-1)συν^2x}{συν^2x} \Leftrightarrow$$

$$(1+\sqrt{3})εφ^2x - 2\sqrt{3}\,εφx + (\sqrt{3}-1) = 0$$

$Δ = 12 - 4(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = 4$, οπότε $εφx = \dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{4}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt{3}\pm 2}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$

$$= \frac{2(\sqrt{3}\pm 1)}{2\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}\pm 1}{1+\sqrt{3}}$$

- $εφx = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow εφx = εφ\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow x = kπ + \dfrac{π}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $εφx = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} = εφ\dfrac{π}{12}$

  $εφx = εφ\dfrac{π}{12} \Leftrightarrow x = kπ + \dfrac{π}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$

(από υπολογιστή έχουμε $2-\sqrt{3} = εφ\dfrac{π}{12}$)

2.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση α ημx + βσυνx = γ έχει λύση αν και μόνο αν $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$

ii) Να λύσετε την εξίσωση (1 + συνt) ημx + ημt συνx = 2 για τις διάφορες τιμές του $t \in (-\pi, \pi)$

Λύση

i)

Όταν $\alpha \neq 0$

Η εξίσωση α ημx + βσυνx = γ $\Leftrightarrow$ $\eta\mu x + \dfrac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

θέτουμε $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\beta}{\alpha}$ οπότε έχω $\eta\mu x + \varepsilon\varphi\omega\ \sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

$$\eta\mu x + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\ \sigma\upsilon\nu x = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega\ \sigma\upsilon\nu x = \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\eta\mu(x + \omega) = \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega$$

Η εξίσωση αυτή , άρα και η αρχική , έχει λύση αν και μόνο αν $\left|\dfrac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right| \leq 1$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\omega \leq 1$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\ \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \leq 1$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\ \frac{1}{1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}} \leq 1$$

$$\gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$$

Όταν $\alpha = 0$

Η εξίσωση γίνεται β συνx = γ

- Αν $\beta = 0$ και $\gamma \neq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $\beta = 0$ και $\gamma = 0$, η εξίσωση είναι ταυτότητα και ισχύει $0^2 \leq 0^2 + 0^2$
  $\gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$
- Αν $\beta \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\gamma}{\beta}$, η οποία έχει λύση αν και μόνο αν

$$\left|\frac{\gamma}{\beta}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\gamma^2}{\beta^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 \leq 0^2 + \beta^2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$$

ii)

Σύμφωνα με το (i) , η εξίσωση (1 + συνt) ημx + ημt συνx = 2 έχει λύση

αν και μόνο αν $(1 + \sigma\upsilon\nu t)^2 + \eta\mu^2 t \geq 4$

$1 + 2συνt + συν^2 t + ημ^2 t \geq 4$

$1 + 2συνt + 1 \geq 4$

$2 + 2συνt \geq 4$

$1 + συνt \geq 2$

$συνt \geq 1 \iff συνt = 1 \iff t = 0$

Τότε η εξίσωση γίνεται $2ημx = 2 \iff ημx = 1 \iff x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

3.

Να αποδείξετε ότι $εφ3α = \frac{3εφα - εφ^3 α}{1 - 3εφ^2 α}$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε την $εφ\frac{π}{12}$ αφού πρώτα δείξετε ότι αυτή είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

Λύση

$$εφ3α = εφ(2α + α) = \frac{εφ2α + εφα}{1 - εφ2αεφα} = \frac{\frac{2εφα}{1 - εφ^2 α} + εφα}{1 - \frac{2εφα}{1 - εφ^2 α}εφα} = \frac{3εφα - εφ^3 α}{1 - 3εφ^2 α}$$

για $α = \frac{π}{12}$ έχουμε $εφ\frac{π}{4} = \frac{3εφ\frac{π}{12} - εφ^3\frac{π}{12}}{1 - 3εφ^2\frac{π}{12}} \iff$

$$1 = \frac{3εφ\frac{π}{12} - εφ^3\frac{π}{12}}{1 - 3εφ^2\frac{π}{12}} \iff εφ^3\frac{π}{12} - 3εφ^2\frac{π}{12} - 3εφ\frac{π}{12} + 1 = 0$$

Άρα η $εφ\frac{π}{12}$ είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

Η εξίσωση $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ με το σχήμα Horner γίνεται

$(x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \iff x + 1 = 0$ ή $x^2 - 4x + 1 = 0 \iff$

$$x = -1 \text{ ή } x = 2 - \sqrt{3} \text{ ή } x = 2 + \sqrt{3}$$

όμως $0 < εφ\frac{π}{12} < εφ\frac{π}{4} = 1$ άρα δεκτή λύση η $x = 2 - \sqrt{3}$ συνεπώς

$$εφ\frac{π}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

4.

(Αριθμός διαιρετός με το 9)

Ο αριθμός 198 = 22·9 διαιρείται με το 9 . Το άθροισμα 1 + 9 + 8 = 18 επίσης διαιρείται με το 9

Ομοίως ο αριθμός 1737 = 1933·9 διαιρείται με το 9 . Το άθροισμα 1 + 7 + 3 + 7 = 18 επίσης διαιρείται με το 9

Γενικά να αποδείξετε τον κανόνα

Ο αριθμός «αβγδ» διαιρείται με το 9 , μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9

Υπόδειξη : Είναι $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha 10^3 + \beta\, 10^2 + \gamma 10 + \delta$. Να θεωρήσετε το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ και την ταυτότητα $f(x) = (x-1)\pi(x) + f(1)$ και να θέσετε $x = 1$ και $x = 10$

Λύση

Αφού $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ τότε $f(10) = \alpha 10^3 + \beta 10^2 + \gamma 10 + \delta = \alpha\beta\gamma\delta$

και $f(1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Η ταυτότητα $f(x) = (x-1)\pi(x) + f(1)$, για $x = 10$, γίνεται

$$f(10) = (10-1)\pi(10) + \alpha + \beta + \gamma + \delta \iff$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = 9\cdot\pi(10) + \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι , αν $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 9\kappa$ τότε

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = 9\cdot\pi(10) + 9\,\kappa = 9(\,\pi(10) + \kappa)$$

δηλαδή ο αβγδ είναι πολλαπλάσιο του 9 , άρα διαιρείται με το 9

Και αν $\alpha\beta\gamma\delta = 9\lambda$ τότε $9\lambda = 9\cdot\pi(10) + \alpha + \beta + \gamma + \delta$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 9\lambda - 9\pi(10) = 9(\lambda - \pi(10))$$

δηλαδή $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ είναι πολλαπλάσιο του 9 , άρα διαιρείται με το 9

5.

(Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης) Το θεώρημα που ακολουθεί παρέχει μια ακόμη μέθοδο προσδιορισμού ριζών ορισμένων πολυωνυμικών εξισώσεων.

Θεώρημα : Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ρητός $\frac{\kappa}{\lambda} \neq 0$ $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\text{ ανάγωγο κλάσμα}\right)$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_o και ο λ είναι διαιρέτης του συντελεστή α_ν. Με την βοήθεια του θεωρήματος αυτού :

i) Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ **β)** $6x^4 + 29x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$

ii) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και $\sqrt{12}$ δεν είναι ρητοί.

Λύση

i)

α)

Πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ είναι οι : $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

Εφαρμόζουμε Horner για $x = \frac{1}{2}$

2	1	1	−1	1/2
	1	1	1	
2	2	2	0	

Άρα $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0$

$x - \frac{1}{2} = 0$ ή $2x^2 + 2x + 2 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ή αδύνατη

β)

Πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης $6x^4 + 29x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$ είναι οι

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

Εφαρμόζουμε Horner για $x = -\frac{1}{2}$

6	29	27	9	1	−1/2
	−3	−13	−7	−1	
6	26	14	2	0	

Επομένως η εξίσωση γίνεται $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $(6x^3 + 26x^2 + 14x + 2) = 0$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad 6x^3 + 26x^2 + 14x + 2 = 0$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για την εξίσωση $6x^3 + 26x^2 + 14x + 2 = 0$

$$3x^3 + 13x^2 + 7x + 1 = 0$$

βρίσκουμε ότι $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $(3x^2 + 12x + 3) = 0$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad 3x^2 + 12x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = -2-\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -2+\sqrt{3}$$

ii)

Μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$ είναι ο $\sqrt{2}$

Οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι οι ± 1 και ± 2

Καμία όμως από αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση , άρα ο $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να είναι ρητός .

Ομοίως για τον $\sqrt{12}$

6.

Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει ακριβώς μία λύση

Λύση

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 2$. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική.

Έστω ότι έχει και ρίζα $\rho < 2$. Τότε $3^\rho + 4^\rho = 5^\rho$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\rho + \left(\frac{4}{5}\right)^\rho = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, που είναι γν.φθίνουσα, αφού $0 < \frac{3}{5} < 1$

Οπότε, η $\rho < 2 \;\Rightarrow\; f(\rho) > f(2) \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{5}\right)^\rho > \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ **(2)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, που είναι γν.φθίνουσα, αφού $0 < \frac{4}{5} < 1$

Οπότε, η $\rho < 2 \;\Rightarrow\; g(\rho) > g(2) \;\Rightarrow\; \left(\frac{4}{5}\right)^\rho > \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ **(3)**

(2) + (3) $\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^\rho + \left(\frac{4}{5}\right)^\rho > \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$, που είναι άτοπο από την (1)

Επομένως δεν υπάρχει λύση μικρότερη του 2

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι δεν υπάρχει και λύση > 2

7.

Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} = 2^x$

Λύση

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 1$

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλη .

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3}$ και $g(x) = 2^x$

Προφανώς η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα .

Έστω ότι υπάρχει λύση $x < 1$. Τότε $f(x) > f(1)$ και $g(x) < g(1)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} > \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad 2^x < 2^1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} > \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad 2^x < 2^1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} > 2 \quad \text{και} \quad 2^x < 2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} > 2 > 2^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} > 2^x$$ άτοπο αφού πρέπει να

είναι $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} = 2^x$

8.

Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $2\log(x+3) = \log(\alpha x)$ έχει μοναδική λύση;

Λύση

Περιορισμοί : $x + 3 > 0$ και $\alpha x > 0$ **(1)**

$2\log(x+3) = \log(\alpha x) \Leftrightarrow \log(x+3)^2 = \log(\alpha x)$

$(x+3)^2 = \alpha x$

$x^2 + 6x + 9 - \alpha x = 0$

$x^2 + (6-\alpha)x + 9 = 0$

Η διακρίνουσα Δ του τριώνυμου $f(x) = x^2 + (6-\alpha)x + 9$ είναι

$\Delta = \alpha^2 - 12\alpha = \alpha(\alpha - 12)$ το πρόσημο της διακρίνουσας φαίνεται στον πίνακα

α	$-\infty$		0		12		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Όταν $\alpha < 0$

  Είναι $\Delta > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες.

  Αλλά $x_1 x_2 = 9 > 0$ και $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \alpha - 6 < 0 \Rightarrow x_1, x_2 < 0$ **(2)**

  Θα είναι x_1, x_2 αρνητικές.

  $(1) \Rightarrow x_1 + 3 > 0$ και $x_2 + 3 > 0 \Rightarrow$

  $x_1 > -3$ και $x_2 > -3$ **(3)**

  $f(-3) = 3\alpha < 0 \Rightarrow$ ο -3 βρίσκεται μεταξύ των ριζών, $x_1 < -3 < x_2$ **(4)**

  Από τις (2), (3), (4) $\Rightarrow$ δεκτή είναι μόνο η μία ρίζα .

- Όταν $0 < \alpha < 12$

  Είναι $\Delta < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

- Όταν $\alpha > 12$

  Είναι $\Delta > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες

  Αλλά $x_1 x_2 = 9 > 0$ και $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \alpha - 6 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 > 0$ **(5)**

  Οι x_1, x_2 ικανοποιούν τους περιορισμούς (1) , άρα είναι δεκτές

- Όταν $\alpha = 0$, δεν ορίζεται ο $\log(\alpha x)$

- Όταν $\alpha = 12$, τότε $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει ρίζα το 3 , η οποία είναι δεκτή διότι ικανοποιεί τους περιορισμούς (1)

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα, όταν $\alpha < 0$ ή $\alpha = 12$

9.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi x + \log_{\frac{\pi}{4}} x = 2$ έχει στο διάστημα $(0,\ \pi)$ ακριβώς μία λύση

Λύση

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = \frac{\pi}{4}$

$\sigma\varphi x + \log_{\frac{\pi}{4}} x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\varphi x = 2 - \log_{\frac{\pi}{4}} x$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sigma\varphi x$ και $g(x) = 2 - \log_{\frac{\pi}{4}} x$

Η $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ \pi)$.

Η $\log_{\frac{\pi}{4}} x$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η $-\log_{\frac{\pi}{4}} x$ γνησίως αύξουσα, οπότε η $g(x) = 2 - \log_{\frac{\pi}{4}} x$ είναι γνησίως αύξουσα .

Αν η εξίσωση είχε και άλλη ρίζα x στο $(0,\ \pi)$ μεγαλύτερη της $\frac{\pi}{4}$,

τότε λόγω της μονοτονίας των συναρτήσεων f και g , θα είχαμε

$$f(\frac{\pi}{4}) > f(x) \quad \text{και} \quad g(\frac{\pi}{4}) < g(x) \quad \Rightarrow \quad 1 > \sigma\varphi x \quad \text{και} \quad 1 < 2 - \log_{\frac{\pi}{4}} x \quad \Rightarrow$$

$$\sigma\varphi x < 1 < 2 - \log_{\frac{\pi}{4}} x$$

$$\sigma\varphi x + \log_{\frac{\pi}{4}} x < 2 \quad \text{άτοπο ,}$$

οπότε δεν υπάρχει ρίζα $x > \frac{\pi}{4}$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι δεν υπάρχει ρίζα x με $0 < x < \frac{\pi}{4}$

10.

Να λύσετε την ανίσωση $\log_3(16^x - 2\cdot 12^x) \le 2x+1$

Λύση

Περιορισμός : $16^x - 2\cdot 12^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{16}{12}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x > 2$

$$\log_3(16^x - 2\cdot 12^x) \le 2x+1 \Leftrightarrow \log_3(16^x - 2\cdot 12^x) \le \log_3 3^{2x+1}$$

$$16^x - 2\cdot 12^x \le 3^{2x+1}$$

$$4^{2x} - 2\cdot 3^x\cdot 4^x \le 3\cdot 3^{2x}$$

$$\frac{4^{2x}}{4^{2x}} - \frac{2\cdot 3^x\cdot 4^x}{4^{2x}} \le \frac{3\cdot 3^{2x}}{4^{2x}}$$

$$1 - 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x \le 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}$$

$$3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x - 1 \ge 0 \quad \textbf{(1)}$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{4}\right)^x = y$ **(2)**

(1) $\Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \le -1$ ή $y \ge \frac{1}{3}$

- Για $y \le -1$

  Η (2) γίνεται $\left(\frac{3}{4}\right)^x \le -1$ που είναι αδύνατη

- Για $y \ge \frac{1}{3}$

  Η (2) γίνεται $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3$

  Και λόγω του περιορισμού , θα είναι $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3 \Leftrightarrow$

$$\log_{\frac{4}{3}} 2 < \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^x < \log_{\frac{4}{3}} 3$$

$$\log_{\frac{4}{3}} 2 < x < \log_{\frac{4}{3}} 3$$

11.

i) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = 1 - x$$

και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\ln x \le 1 - x$

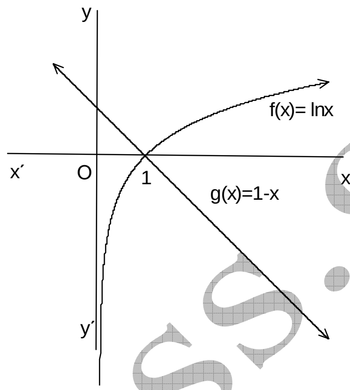
ii) Ομοίως για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 1$$

και την ανίσωση $\ln x \ge -x^2 + 1$

Λύση

i)

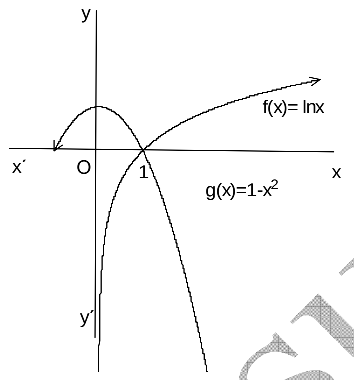


Οι λύσεις της ανίσωσης $\ln x \le 1 - x$

όπως φαίνεται από το σχήμα

είναι οι $0 < x \le 1$

ii)



Οι λύσεις της ανίσωσης $\ln x \ge -x^2 + 1$

όπως φαίνεται από το σχήμα

είναι οι $x \ge 1$

12.

Δίνονται τρείς θετικοί πραγματικοί αριθμοί α , β , γ και τρεις γωνίες Α , Β, Γ έτσι ώστε Α, Β, $\Gamma > 0$, $A + B + \Gamma = \pi$ και $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ δείξτε ότι

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu A$

$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \sigma\upsilon\nu B$

$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta\alpha\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$

Λύση

Έστω $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \lambda$ τότε $\alpha = \lambda\,\eta\mu A$, $\beta = \lambda\eta\mu B$, $\gamma = \lambda\eta\mu\Gamma$ **(1)**

Και $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \overset{(1)}{=} \lambda^2\eta\mu^2 B+\lambda^2\eta\mu^2\Gamma-2\lambda^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A \overset{(*)}{=}$

$$= \lambda^2\eta\mu^2 B+\lambda^2\eta\mu^2\Gamma+2\lambda^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) =$$
$$= \lambda^2\eta\mu^2 B+\lambda^2\eta\mu^2\Gamma+2\lambda^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma[\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu B\eta\mu\Gamma] =$$
$$= \lambda^2[\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-2\eta\mu^2 B\eta\mu^2\Gamma] =$$
$$= \lambda^2[\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu^2 B\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2 B\eta\mu^2\Gamma] =$$
$$= \lambda^2[\eta\mu^2 B(1-\eta\mu^2\Gamma)+\eta\mu^2\Gamma(1-\eta\mu^2 B)+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma]=$$
$$= \lambda^2[\eta\mu^2 B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+\eta\mu^2\Gamma\,\sigma\upsilon\nu^2 B+2\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma]=$$
$$= \lambda^2[\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B\,]^2=$$
$$= \lambda^2[\eta\mu(B+\Gamma)]^2 \overset{(**)}{=}$$
$$= \lambda^2\eta\mu^2 A \overset{(1)}{=} \alpha^2$$

$*\quad A+B+\Gamma=\pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu A=-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$

$**\quad A+B+\Gamma=\pi \Rightarrow \eta\mu A=\eta\mu(B+\Gamma)$

Ομοίως για τις υπόλοιπες σχέσεις

13.

Δίνονται τρείς θετικοί πραγματικοί αριθμοί α , β , γ και τρεις γωνίες Α , Β, Γ έτσι

ώστε $A,\ B,\ \Gamma>0$, $A+B+\Gamma=\pi$ και $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο τρίγωνο ΚΛΜ με

$(\Lambda M)=\alpha$, $(KM)=\beta$, $(K\Lambda)=\gamma$, $K=A$, $\Lambda=B$, $M=\Gamma$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα α , β , γ , είναι μήκη πλευρών τριγώνου .

Προς τούτο αρκεί $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$ και $\gamma<\alpha+\beta$

Έστω $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\lambda$ τότε $\alpha=\lambda\,\eta\mu A$, $\beta=\lambda\eta\mu B$, $\gamma=\lambda\eta\mu\Gamma$ **(1)**

Τότε $\alpha<\beta+\gamma \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda\eta\mu A<\lambda\eta\mu B+\lambda\eta\mu\Gamma$

$$\eta\mu A<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma \quad \text{και αφού } (B+\Gamma)+A=\pi$$
$$\eta\mu(B+\Gamma)<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma$$
$$\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu B\,\eta\mu\Gamma<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma$$

$\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma-\sigma\upsilon\nu B\,\eta\mu\Gamma>0 \Leftrightarrow \eta\mu B(1-\sigma\upsilon\nu\Gamma)+\eta\mu\Gamma(1-\sigma\upsilon\nu B)>0$

η παραπάνω σχέση είναι αληθής αφού $A+B+\Gamma=\pi$ άρα $0<A, B, \Gamma<\pi$

ομοίως για τις σχέσεις $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$

Άρα υπάρχει τρίγωνο ΚΛΜ έτσι ώστε (ΛΜ) = α , (ΚΜ) = β και (ΚΛ) = γ

Για το τρίγωνο ΚΛΜ όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση ισχύει

$$\text{συν}K = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \text{συν}A$$

$$\text{συν}\Lambda = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} = \text{συν}B$$

$$\text{συν}M = \frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\beta\alpha} = \text{συν}\Gamma \quad \text{άρα } K = A,\ \Lambda = B \text{ και } M = \Gamma$$

14.

Δίνονται τρείς θετικοί πραγματικοί αριθμοί α , β , γ και τρεις γωνίες Α , Β, Γ έτσι ώστε $0 < A,\ B,\ \Gamma < \pi$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \text{συν}A$, $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \text{συν}B$, $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta\alpha\ \text{συν}\Gamma$ δείξτε ότι

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma} \text{ και } A + B + \Gamma = \pi$$

Λύση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \text{συν}A \Leftrightarrow \text{συν}A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \text{ οπότε}$$

$$\text{ημ}^2A = 1-\text{συν}^2A = 1-\left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)^2 = \frac{2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\beta^4-\gamma^4-\alpha^4}{4\beta^2\gamma^2}$$

και επειδή $0 < A < \pi$ θα είναι $\text{ημ}A = \dfrac{\sqrt{2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\beta^4-\gamma^4-\alpha^4}}{2\beta\gamma}$

$$\text{άρα } \frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}} = \mu \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{ομοίως } \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma} = \mu \text{ άρα } \frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$$

για να είναι $A + B + \Gamma = \pi$ αρκεί να δείξουμε ότι

$\text{ημ}(B+\Gamma) = \text{ημ}A$ και $\text{συν}(B+\Gamma) = -\text{συν}A$

$$\text{ημ}(B+\Gamma) = \text{ημ}B\ \text{συν}\Gamma + \text{συν}B\ \text{ημ}\Gamma = \frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\beta\alpha} + \frac{\gamma}{\mu}\cdot\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha} =$$

$$= \frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\mu\alpha} + \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\mu\alpha} = \frac{\alpha}{\mu} = \text{ημ}A$$

$$συν(Β + Γ) = συνΒ\, συνΓ - ημΒημΓ =$$

$$= \frac{γ^2+α^2-β^2}{2γα}\,\frac{β^2+α^2-γ^2}{2βα} - \frac{β}{μ}\,\frac{γ}{μ} =$$

$$= \frac{(γ^2+α^2-β^2)(β^2+α^2-γ^2)}{4γβα^2} - \frac{βγ}{μ^2} \overset{(1)}{=}$$

$$= πράξεις = -\frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ} = -συνΑ$$

15 .

Δίνονται τρείς θετικοί πραγματικοί αριθμοί α , β , γ και τρεις γωνίες Α , Β, Γ έτσι ώστε $0< Α,\ Β,\ Γ < π$ και $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ\, συνΑ$, $β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγ\, συνΒ$, $γ^2 = β^2 + α^2 - 2βα\, συνΓ$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο τρίγωνο ΚΛΜ με (ΛΜ)= α , (ΚΜ) = β , (ΚΛ) = γ , Κ = Α , Λ = Β , Μ = Γ.

Λύση

Είναι η απόδειξη της άσκησης 14 και μετά της 13 .