ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (Γ΄ Ομάδας)

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 186

1.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^2-3x+1\right)^{3x-5} = 1$

Λύση

$\left(x^2-3x+1\right)^{3x-5}=1 \iff$ $(x^2-3x+1=-1$ και $3x-5$ άρτιος$)$ ή

$(x^2-3x+1\neq 0$ και $3x-5=0)$ ή

$(x^2-3x+1=1)$

α) $x^2-3x+1=-1$ και $3x-5$ άρτιος $\iff$

$x^2-3x+2=0$ και $3x-5$ άρτιος $\iff$

$x=1$ ή $x=2$ και $3x-5$ άρτιος $\iff$ $x=1$

β) $x^2-3x+1\neq 0$ και $3x-5=0$ $\iff$ $x^2-3x+1\neq 0$ και $3x=5$

$x^2-3x+1\neq 0$ και $x=\frac{5}{3}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^2-3\cdot\frac{5}{3}+1\neq 0$ και $x=\frac{5}{3}$

$\frac{25}{9}-\frac{45}{9}+\frac{9}{9}\neq 0$ και $x=\frac{5}{3}$

$-\frac{11}{9}\neq 0$ και $x=\frac{5}{3}$ $\iff$ $x=\frac{5}{3}$

γ) $x^2-3x+1=1 \iff x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0$ ή $x-3=0$ $\iff$ $x=0$ ή $x=3$

1.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $x^{x^2+3x+1} = x$

Λύση

$$x^{x^2+3x+1} = x \Leftrightarrow x^{x^2+3x+1} - x = 0$$

$$x(x^{x^2+3x} - 1) = 0$$

$$x^{x^2+3x} - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0$$

$$x^{x^2+3x} = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \ \text{και}\ x^2 + 3x \ \text{άρτιος}) \quad \text{ή}$$

$$(x \neq 0 \ \text{και}\ x^2 + 3x = 0) \quad \text{ή} \quad x = 1$$

α) $x = -1$ και $x^2 + 3x$ άρτιος $\Leftrightarrow$

$x = -1$ και $(-1)^2 + 3(-1)$ άρτιος $\Leftrightarrow$

$x = -1$ και $1 - 3$ άρτιος $\Leftrightarrow$

$x = -1$ και -2 άρτιος $\Leftrightarrow$ $x = -1$

β) $x \neq 0$ και $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 0$ και $x(x+3) = 0 \Leftrightarrow$

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

2.

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι

$$\log_{\alpha+\beta}\gamma + \log_{\alpha-\beta}\gamma = 2(\log_{\alpha+\beta}\gamma)(\log_{\alpha-\beta}\gamma) \quad , \ \alpha+\beta\,,\ \alpha-\beta \neq 1$$

Λύση

Αν γ = 1 η σχέση είναι προφανής

Αν γ ≠ 1 έχουμε

$$\log_{\alpha+\beta}\gamma + \log_{\alpha-\beta}\gamma = 2(\log_{\alpha+\beta}\gamma)(\log_{\alpha-\beta}\gamma) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log\gamma}{\log(\alpha+\beta)} + \frac{\log\gamma}{\log(\alpha-\beta)} = 2\frac{\log\gamma}{\log(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\log\gamma}{\log(\alpha-\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\log(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\log(\alpha-\beta)} = 2\frac{1}{\log(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\log\gamma}{\log(\alpha-\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\log(\alpha-\beta) + \log(\alpha+\beta) = 2\log\gamma \Leftrightarrow$$

$$\log[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)] = \log\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \ \text{που ισχύει}$$

3.

Αν $(\alpha\gamma)^{\log_\alpha \beta} = \gamma^2$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$, $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ($0<\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 1,\ \theta>0$)

Λύση

$$(\alpha\gamma)^{\log_\alpha \beta} = \gamma^2 \Leftrightarrow \log(\alpha\gamma)^{\log_\alpha \beta} = \log\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\log_\alpha \beta\,[\log\alpha + \log\gamma] = 2\log\gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log\beta}{\log\alpha}[\log\alpha + \log\gamma] = 2\log\gamma \Leftrightarrow$$

$$\log\beta[\log\alpha + \log\gamma] = 2\log\alpha\log\gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\log\beta} = \frac{1}{\log\alpha} + \frac{1}{\log\gamma} \qquad \textbf{(1)}$$

Αν $\theta = 1$ φανερά ισχύει το ζητούμενο

Αν $\theta \neq 1$ η **(1)** $\Leftrightarrow \dfrac{2\log\theta}{\log\beta} = \dfrac{\log\theta}{\log\alpha} + \dfrac{\log\theta}{\log\gamma} \Leftrightarrow 2\log_\beta\theta = \log_\alpha\theta + \log_\gamma\theta$

Άρα οι αριθμοί $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$, $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

4.

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου δείξτε ότι

$$\frac{\log_\alpha\theta - \log_\beta\theta}{\log_\beta\theta - \log_\gamma\theta} = \frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta} \quad (0<\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \theta \neq 1,\ \beta \neq \gamma)$$

Λύση

$$\frac{\log_\alpha\theta - \log_\beta\theta}{\log_\beta\theta - \log_\gamma\theta} = \frac{\dfrac{\log\theta}{\log\alpha} - \dfrac{\log\theta}{\log\beta}}{\dfrac{\log\theta}{\log\beta} - \dfrac{\log\theta}{\log\gamma}} = \frac{\log\gamma(\log\beta - \log\alpha)}{\log\alpha(\log\gamma - \log\beta)} \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε

$$\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \log\beta^2 = \log(\alpha\gamma) \Leftrightarrow 2\log\beta = \log\alpha + \log\gamma \Leftrightarrow$$

$$\log\beta - \log\alpha = \log\gamma - \log\beta \text{ τότε}$$

$$\textbf{(1)} \Leftrightarrow \frac{\log_\alpha\theta - \log_\beta\theta}{\log_\beta\theta - \log_\gamma\theta} = \frac{\log\gamma}{\log\alpha} = \frac{\dfrac{\log\theta}{\log\alpha}}{\dfrac{\log\theta}{\log\gamma}} = \frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta}$$

5.

Να αποδείξετε ότι $\log 5 = 1 - \log 2$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$x^{\log(2x)} = 5$$

Λύση

$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$

Περιορισμός $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$$x^{\log(2x)} = 5 \Leftrightarrow \log x^{\log(2x)} = \log 5$$

$$\log(2x)\cdot\log x = \log 5$$

$$(\log 2 + \log x)\log x = \log 5$$

$$\log^2 x + \log 2\cdot\log x = 1 - \log 2$$

$$\log^2 x + \log 2\cdot\log x + \log 2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \log^2 2 - 4(\log 2 - 1)\\ &= \log^2 2 - 4\log 2 + 4\\ &= (\log 2 - 2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log x = \frac{-\log 2 \pm (\log 2 - 2)}{2} &= \frac{-\log 2 + \log 2 - 2}{2} \quad ή \quad \frac{-\log 2 - \log 2 + 2}{2}\\ &= -1 \quad ή \quad \frac{-2\log 2 + 2}{2}\\ &= -1 \quad ή \quad 1 - \log 2\\ &= -1 \quad ή \quad \log 5\end{aligned}$$

- $\log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$
- $\log x = \log 5 \Leftrightarrow x = 5$

6.

Να λύσετε στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$\log_{\eta\mu x}2 + \log_{\sigma\upsilon\nu x}2 + (\log_{\eta\mu x}2)(\log_{\sigma\upsilon\nu x}2) = 0$$

Λύση

$$\log_{\eta\mu x}2 + \log_{\sigma\upsilon\nu x}2 + (\log_{\eta\mu x}2)(\log_{\sigma\upsilon\nu x}2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log 2}{\log \eta\mu x} + \frac{\log 2}{\log \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\log 2}{\log \eta\mu x}\,\frac{\log 2}{\log \sigma\upsilon\nu x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\log \eta\mu x} + \frac{1}{\log \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{\log \eta\mu x}\,\frac{\log 2}{\log \sigma\upsilon\nu x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log\sigma\upsilon\nu x + \log\eta\mu x + \log 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log[2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

Και επειδή $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $x = \frac{\pi}{4}$

7.

Να λύσετε, στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, την εξίσωση $(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x} = (\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

$$(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x} = (\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \quad (\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x} = \left(\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x} = \frac{1}{(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}}$$

$$(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x}(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x} = 1$$

$(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} = 1$ και επειδή $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \neq 0$,
αφού, $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 0$,
η εξίσωση $\Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x = 1$ ή $\varepsilon\varphi x = -1$ και επειδή $\varepsilon\varphi x > 0$,
η εξίσωση $\Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{4}$$

8.

Να λύσετε την ανίσωση $27^x + 12^x - 2\cdot 8^x > 0$

Λύση

$27^x + 12^x - 2\cdot 8^x > 0 \iff \left(3^3\right)^x + (3\cdot 4)^x - 2\cdot\left(2^3\right)^x > 0$

$\left(3^x\right)^3 + 3^x\cdot 4^x - 2\cdot\left(2^x\right)^3 > 0$

$\left(3^x\right)^3 + 3^x\cdot 2^{2x} - \left(2^x\right)^3 - \left(2^x\right)^3 > 0$

$\left[\left(3^x\right)^3 - \left(2^x\right)^3\right] + \left[3^x 2^{2x} - 2^{3x}\right] > 0$

$\left(3^x - 2^x\right)\cdot\left[\text{παράσταση } \Pi_1 > 0\right] + 2^{2x}\left(3^x - 2^x\right) > 0$

$\left(3^x - 2^x\right)\left[\text{παράσταση } \Pi_1 + 2^{2x}\right] > 0$

$3^x - 2^x > 0$

$3^x > 2^x \iff \left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 1 \iff x > 0$