

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 170 - 173

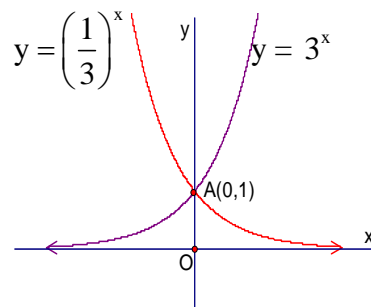
Α' Ομάδας

1.i)

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = 3^x \quad \text{και} \quad f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Λύση



1.ii)

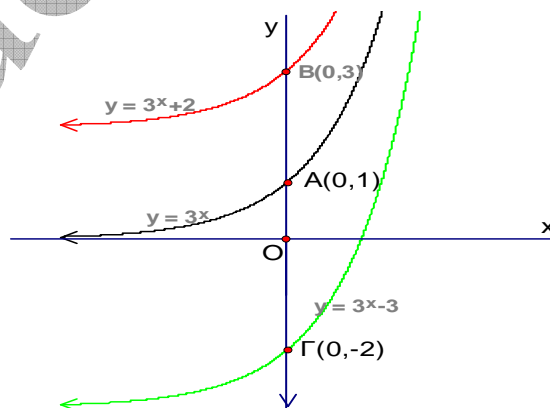
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = 3^x, \quad f_2(x) = 3^x + 2 \quad \text{και} \quad f_3(x) = 3^x - 3$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της f_2 προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Η γραφική παράσταση της f_3 προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



1.iii)

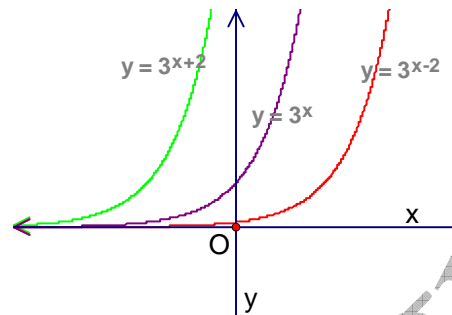
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = 3^x, \quad f_4(x) = 3^{x-2} \quad \text{και} \quad f_5(x) = 3^{x+2}$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της f_4 προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

Η γραφική παράσταση της f_5 προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

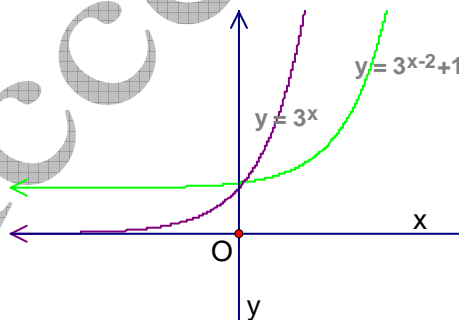
**1.iv)**

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = 3^x, \quad f_6(x) = 3^{x-2} + 1$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της f_6 προκύπτει από τη μετατόπιση της C_f , οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά 1 μονάδα άνω.



1.v)

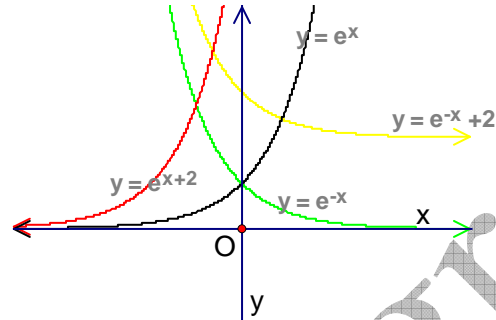
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$g(x) = e^x, \quad g_1(x) = e^{x+2}, \quad g_2(x) = e^{-x}, \quad g_3(x) = e^{-x} + 2$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της g_1 προκύπτει από τη μετατόπιση της C_g , οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

Επειδή $g_2(-x) = e^{-(-x)} = e^x = g(x)$, η γραφική παράσταση της g_2 είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$



Η γραφική παράσταση της g_3 προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της g_2 κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

2.i)

Να λύσετε την εξίσωση $2^x = 64$

Λύση

$$2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$$

2.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$

Λύση

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$$

2.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$

Λύση

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \frac{1}{2^{-2}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

2.iv)

Να λύσετε την εξίσωση $3^{-x} = \frac{1}{81}$

Λύση

$$\begin{aligned} 3^{-x} = \frac{1}{81} &\Leftrightarrow 3^{-x} = \frac{1}{3^4} \\ 3^{-x} &= 3^{-4} \\ -x = -4 &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

2.v)

Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$

Λύση

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

2.vi)

Να λύσετε την εξίσωση $27^{4x} = 9^{x+1}$

Λύση

$$\begin{aligned}
 27^{4x} = 9^{x+1} &\Leftrightarrow (3^3)^{4x} = (3^2)^{x+1} \\
 &3^{12x} = 3^{2(x+1)} \\
 12x &= 2(x+1) \\
 12x &= 2x+2 \\
 10x &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

2.vii)

Να λύσετε την εξίσωση $32^x = 16^{1-x}$

Λύση

$$\begin{aligned}
 32^x = 16^{1-x} &\Leftrightarrow (2^5)^x = (2^4)^{1-x} \\
 2^{5x} &= 2^{4(1-x)} \\
 5x &= 4(1-x) \\
 5x &= 4 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

2.viii)

Να λύσετε την εξίσωση $3^{x^2-x-2} = 1$

Λύση

$$3^{x^2-x-2} = 1 \Leftrightarrow 3^{x^2-x-2} = 3^0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \quad \text{ή} \quad -1$$

3.i)

Να λύσετε την εξίσωση $2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$

Λύση

$$2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2 - 4 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x = 0$$

Θέτουμε $2^x = y$

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση γίνεται } 2y^2 - 4y = 0 &\Leftrightarrow 2y(y-2) = 0 \\ &y = 0 \text{ ή } y - 2 = 0 \\ &y = 0 \text{ ή } y = 2 \end{aligned}$$

α) για $y = 0$, θα έχουμε $2^x = 0$ αδύνατη

β) για $y = 2$ θα έχουμε $2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$

3.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

Λύση

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Θέτουμε $2^x = y$

Η εξίσωση γίνεται $2y^2 - 5y + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9, \quad y = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ ή } \frac{1}{2}$$

α) για $y = 2$, θα έχουμε $2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$

β) για $y = \frac{1}{2}$ θα έχουμε $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

3.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

Λύση

$$3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \quad 3 \cdot 3^{2x} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \quad 3 \cdot (3^x)^2 - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$$

Θέτουμε $3^x = y$

Η εξίσωση γίνεται $3y^2 - 26y - 9 = 0$

$$\Delta = 26^2 + 108 = 676 + 108 = 784, \quad y = \frac{26 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{26 \pm 28}{6} = 9 \text{ ή } -\frac{1}{3}$$

α) για $y = 9$, θα έχουμε $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

β) για $y = -\frac{1}{3}$ θα έχουμε $3^x = -\frac{1}{3}$ αδύνατη

4.i)

Να λύσετε την ανίσωση $5^{x^2-5x+6} < 1$

Λύση

$$5^{x^2-5x+6} < 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-5x+6} < 5^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1, \quad \text{ρίζες του τριωνύμου } 2 \text{ ή } 3$$

Θέλουμε το τριώνυμο αρνητικό, δηλαδή ετερόσημο του $a = 1$,
 άρα ο x θα είναι εντός των ριζών, δηλαδή $2 < x < 3$

4.ii)

Να λύσετε την ανίσωση $7^{2x-4} > 7^{x+1}$

Λύση

$$7^{2x-4} > 7^{x+1} \Leftrightarrow 2x-4 > x+1 \Leftrightarrow x > 5$$

4.iii)

Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$

Λύση

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \Leftrightarrow x+1 > 2x-4 \Leftrightarrow 5 > x \Leftrightarrow x < 5$$

5.i)

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3(2x+1)} = 2^5 \cdot 2^{2(4y-1)} \\ 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{3(2x+1)} = 2^{2(4y-1)+5} \\ 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(2x+1) = 2(4y-1)+5 \\ x-y+1 = 2y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3 = 8y-2+5 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-8y = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot 3y - 8y = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

5.ii)

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$$

Λύση

Θέτουμε $3^x = \omega$, $2^y = \varphi$

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} \omega + \varphi = 11 \\ \omega - \varphi = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\omega = 18 \\ 2\varphi = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 9 \\ \varphi = 2 \end{cases}$$

$$3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$2^y = 2 \Leftrightarrow 2^y = 2^1 \Leftrightarrow y = 1$$

6.i)

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} e^x \cdot e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = e^0 \\ e^{x+y} = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=2 \\ 2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

netsuccess.gr

6.ii)

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$

Λύση

Θέτουμε $2^x = \omega > 0$, $2^y = \varphi > 0$

Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} \omega \varphi = 8 \\ \omega + \varphi = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \varphi = 8 \\ \varphi = 6 - \omega \end{cases}$

$$\begin{cases} \omega(6 - \omega) = 8 \\ \varphi = 6 - \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega(6 - \omega) = 8 \\ \varphi = 6 - \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\omega - \omega^2 = 8 \\ \varphi = 6 - \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 - 6\omega + 8 = 0 \\ \varphi = 6 - \omega \end{cases}$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4, \quad \omega = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 4 \quad \text{ή} \quad 2$$

α) για $\omega = 4$, η εξίσωση $\varphi = 6 - \omega \Leftrightarrow \varphi = 6 - 4 \Leftrightarrow \varphi = 2$

$$2^y = \varphi \Leftrightarrow 2^y = 2^1 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\omega = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$$

β) για $\omega = 2$, η εξίσωση $\varphi = 6 - \omega \Leftrightarrow \varphi = 6 - 2 \Leftrightarrow \varphi = 4$

$$2^y = \varphi \Leftrightarrow 2^y = 2^2 \Leftrightarrow y = 2$$

$$\omega = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$$

7.

Να λύσετε την ανίσωση $w^2 - 101w + 100 < 0$ και στη συνέχεια την ανίσωση $10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 < 0$

Λύση

Ρίζες του τριωνόμου: 1, 100

$$w^2 - 101w + 100 < 0 \Leftrightarrow 1 < w < 100$$

$$10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 < 0 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 101 \cdot 10^x + 100 < 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } 10^x = w, \text{ οπότε η (1)} \Leftrightarrow 10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 < 0$$

$$1 < w < 100$$

$$1 < 10^x < 100$$

$$10^0 < 10^x < 10^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

netsuccess.gr

Β' Ομάδας

1.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} \right)^x. \text{ Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι}$$

- i) γνησίως φθίνουσα ii) γνησίως αύξουσα

Λύση

$$\text{Πρέπει } \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(2\alpha-1) > 0$$

$$4\alpha - 2 - 2\alpha^2 + \alpha > 0$$

$$2\alpha^2 - 5\alpha + 2 < 0$$

$$\text{Ρίζες του τριωνόμου : } 2, \frac{1}{2}. \quad \text{Άρα } \frac{1}{2} < \alpha < 2 \quad (1)$$

i)

$$\text{Πρέπει να είναι και } \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} - 1 < 0$$

$$\frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1} < 0$$

$$\frac{3-3\alpha}{2\alpha-1} < 0$$

$$\frac{3(1-\alpha)}{2\alpha-1} < 0$$

$$(1-\alpha)(2\alpha-1) < 0$$

$$2\alpha - 1 - 2\alpha^2 + \alpha < 0$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha + 1 > 0$$

$$\alpha < \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha > 1 \quad (2)$$

Συναλήθευση των (1), (2) $1 < \alpha < 2$

ii)

$$\text{Πρέπει να είναι και } \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow$$

.....

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \quad (3)$$

Συναλήθευση των (1), (3): $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

2.i)

Να λύσετε την εξίσωση $4^{x-1} - 5\sqrt{4^{x-2}} + 1 = 0$

Λύση

$$4^{x-1} - 5\sqrt{4^{x-2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - 5\sqrt{\frac{4^x}{4^2}} + 1 = 0$$

$$\frac{4^x}{4} - 5 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{4^x} + 1 = 0$$

$$4^x - 5\sqrt{4^x} + 4 = 0$$

Θέτουμε $\sqrt{4^x} = y$, οπότε $4^x = y^2$

Η εξίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = 4$

α) για $y = 1$ έχουμε $\sqrt{4^x} = 1 \Leftrightarrow 4^x = 1 \Leftrightarrow 4^x = 4^0 \Leftrightarrow x = 0$

β) για $y = 4$ έχουμε $\sqrt{4^x} = 4 \Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2$

2.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 3^{x-1} = \frac{45}{3^{x+2}} + \frac{7}{3^x}$

Λύση

$$3^x + 3^{x-1} = \frac{45}{3^{x+2}} + \frac{7}{3^x} \Leftrightarrow 3^x + \frac{1}{3}3^x = \frac{45}{3^2 3^x} + \frac{7}{3^x}$$

$$3^x + \frac{1}{3}3^x = \frac{5}{3^x} + \frac{7}{3^x}$$

$$\frac{4}{3}3^x = \frac{12}{3^x}$$

$$3^{2x} = \frac{3 \cdot 12}{4}$$

$$(3^x)^2 = 9$$

$$3^x = 3$$

$$3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$$

2.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$

Λύση

$$\begin{aligned}
 21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2} &\Leftrightarrow 21 \cdot 3^x + 5^3 \cdot 5^x = 3^4 \cdot 3^x + 5^2 \cdot 5^x \\
 21 \cdot 3^x + 125 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x + 25 \cdot 5^x & \\
 100 \cdot 5^x = 60 \cdot 3^x & \\
 \frac{5^x}{3^x} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} & \\
 \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} &\Leftrightarrow x = -1
 \end{aligned}$$

2.iv)

Να λύσετε την εξίσωση $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

Λύση

$$\begin{aligned}
 3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1} &\Leftrightarrow (3^2)^x + 9^x = 11 \cdot \frac{4^x}{4} + 4 \cdot 4^x \\
 9^x + 9^x = 11 \cdot \frac{4^x}{4} + 4 \cdot 4^x & \\
 8 \cdot 9^x = 11 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x & \\
 8 \cdot 9^x = 27 \cdot 4^x & \\
 \frac{9^x}{4^x} = \frac{27}{8} & \\
 \frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \frac{3^3}{2^3} & \\
 \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 & \\
 2x = 3 &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

2.v)

Να λύσετε την εξίσωση $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Λύση

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 4^x - \frac{1}{\sqrt{3}}3^x = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{1}{2}(2^2)^x$$

$$2\sqrt{3}4^x - 2 \cdot 3^x = 2 \cdot 3 \cdot 3^x - \sqrt{3} \cdot 4^x$$

$$3\sqrt{3}4^x = 8 \cdot 3^x$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{4\sqrt{4}}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{4 \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

3.i)

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + \frac{16}{2^x} = 11 \end{cases} \quad \text{Θέτουμε } 2^x = \omega \quad \text{και} \quad 3^y = \varphi$$

$$\text{Το σύστημα γίνεται} \quad \begin{cases} \varphi - \omega = 1 \\ \varphi + \frac{16}{\omega} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega\varphi + 16 = 11\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega(1 + \omega) + 16 = 11\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega + \omega^2 + 16 = 11\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega^2 - 10\omega + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \varphi = 1 + \omega \\ \omega = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 3 \\ \omega = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \varphi = 9 \\ \omega = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^y = 3^1 \\ 2^x = 2^1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3^y = 3^2 \\ 2^x = 2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

3.i)

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 5^y \cdot 2^y \cdot 5^x = 250 \cdot 40 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 5^{y+x} = 10000 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 \cdot 5)^{y+x} = 10^4 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (10)^{y+x} = 10^4 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x=4 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4-x \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 2^{4-x} \cdot 5^x = 40 \end{cases} \quad (1)$$

$$2^{4-x} \cdot 5^x = 40 \Leftrightarrow \frac{2^4}{2^x} \cdot 5^x = 40$$

$$16 \cdot 5^x = 40 \cdot 2^x$$

$$\frac{5^x}{2^x} = \frac{40}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = 4 - x \Leftrightarrow y = 4 - 1 \Leftrightarrow y = 3$$

4.i)

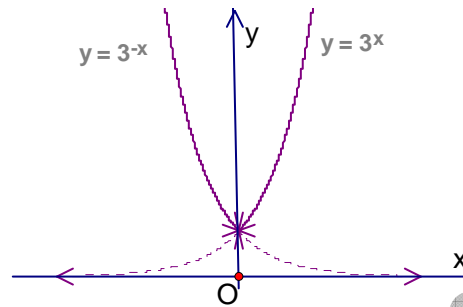
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 3^{|x|}$

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{όταν } x \geq 0 \\ 3^{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση του κλάδου

$f(x) = 3^x$ με $x \geq 0$ προκύπτει από την καμπύλη $y = 3^x$ διαγράφοντας τα σημεία της που έχουν τετμημένη < 0 , (διακεκομμένο τμήμα της)



Η γραφική παράσταση του κλάδου $f(x) = 3^{-x}$ με $x < 0$ προκύπτει από την καμπύλη $y = 3^{-x}$ διαγράφοντας τα σημεία της που έχουν τετμημένη ≥ 0 , (διακεκομμένο τμήμα της)

4.ii)

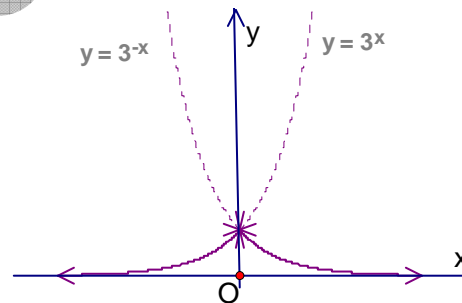
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 3^{-|x|}$

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ 3^x, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση του κλάδου

$f(x) = 3^{-x}$ με $x \geq 0$ προκύπτει από την καμπύλη $y = 3^{-x}$ διαγράφοντας τα σημεία της που έχουν τετμημένη < 0 , (διακεκομμένο τμήμα της)



Η γραφική παράσταση του κλάδου $f(x) = 3^x$ με $x < 0$ προκύπτει από την καμπύλη $y = 3^x$ διαγράφοντας τα σημεία της που έχουν τετμημένη ≥ 0 , (διακεκομμένο τμήμα της)

5.

Αν $f(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, να αποδείξετε ότι

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$$

Λύση

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 - [g(x)]^2 &= \frac{1}{4}(\alpha^x + \alpha^{-x})^2 - \frac{1}{4}(\alpha^x - \alpha^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^{2x} + 2\alpha^x\alpha^{-x} + \alpha^{-2x} - \alpha^{2x} + 2\alpha^x\alpha^{-x} - \alpha^{-2x}) \\ &= \frac{1}{4}(2 + 2) = 1 \end{aligned}$$

netsuccess.gr

6.

Αν αφήσουμε το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου με βενζίνη ανοικτό, η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα.

- i) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες.
- ii) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση
- iii) Με τη χρήση υπολογιστή τσέπης να διαπιστώσετε ότι μετά 40 εβδομάδες μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

Λύση**i)**

Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες, σε λίτρα

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = f(0) - f(0) \frac{20}{100} = f(0) \left(1 - \frac{20}{100}\right) = f(0) \frac{80}{100} = 5 \cdot \frac{4}{5} = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^1$$

$$f(2) = f(1) - f(1) \frac{20}{100} = f(1) \left(1 - \frac{20}{100}\right) = f(1) \frac{80}{100} = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \frac{4}{5} = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

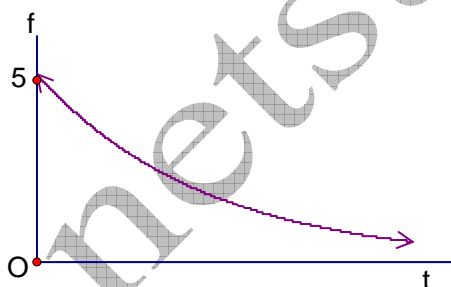
$$f(3) = \dots\dots\dots = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

*

*

*

$$f(t) = \dots\dots\dots = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

ii)**iii)**

$$f(40) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{40} = 0,000013$$

7.

Το ραδιενεργό Ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 γραμμάρια,

- i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση, η οποία δίνει την ποσότητα του Ραδίου μετά από t χρόνια είναι $Q(t) = 5 \cdot (0,5)^{t/1600}$
- ii) να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 600 χρόνια με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων
- iii) να αποδείξετε ότι μετά από 20000 χρόνια μόλις 0,001 γραμμάρια θα έχουν απομείνει.

Λύση

i)

$$\text{Είναι δεδομένο ότι } Q(t) = Q_0 e^{ct} \Rightarrow Q(t) = 5(e^c)^t \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{c \cdot 1600} \Rightarrow \frac{1}{2} = (e^c)^{1600} \Rightarrow e^c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$$

$$\text{Η (1)} \Rightarrow Q(t) = 5 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}} \right]^t \Rightarrow Q(t) = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

ii)

$$Q(600) = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{600}{1600}} = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{16}} = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}} = 3,86$$

iii)

$$Q(20000) = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20000}{1600}} = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200}{16}} = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{25}{2}} = 0,001$$

8.

Ένας πωλητής αυτοκινήτων βεβαιώνει τους πελάτες του ότι η αξία ενός αυτοκινήτου 40.000 ευρώ ελαττώνεται κατά 15% το χρόνο στα πρώτα 6 χρόνια από την πώλησή του.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή του αυτοκινήτου μέσα στα 6 χρόνια.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του αυτοκινήτου στο τέλος του έκτου χρόνου.

Λύση

i)

Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που δίνει την τιμή του αυτοκινήτου σε t χρόνια, όπου $0 \leq t \leq 6$

$f(0) = 40$ σε χιλιάδες ευρώ

$$f(1) = f(0) - f(0) \frac{15}{100} = f(0) \left(1 - \frac{15}{100}\right) = f(0) \frac{85}{100} = 40 \cdot \frac{17}{20} = 40 \left(\frac{17}{20}\right)^1$$

$$f(2) = f(1) - f(1) \frac{15}{100} = f(1) \left(1 - \frac{15}{100}\right) = f(1) \frac{85}{100} = 40 \left(\frac{17}{20}\right)^1 \frac{17}{20} = 40 \left(\frac{17}{20}\right)^2$$

$$f(3) = \dots\dots\dots = 40 \left(\frac{17}{20}\right)^3$$

*

*

*

$$f(t) = \dots\dots\dots = 40 \left(\frac{17}{20}\right)^t$$

ii)

$$f(6) = 40 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^6 \text{ σε χιλιάδες ευρώ } \approx 15.000 \text{ ευρώ}$$

9.

Η ένταση του ηλιακού φωτός σε βάθος x μέτρων μίας θολής λίμνης ελαττώνεται εκθετικά σύμφωνα με τον τύπο $I(x) = I_0 e^{-0,5x}$, $x \geq 0$ όπου I_0 είναι η ένταση του φωτός στην επιφάνεια της λίμνης

i) Να υπολογίσετε το $e^{-0,5x}$ για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

ii) Να βρείτε την τιμή του x στον πλησιέστερο ακέραιο για την οποία ο λόγος

$$\frac{I(x)}{I_0} \text{ είναι } \alpha) 1, \quad \beta) 0,1$$

iii) Να επιβεβαιώσετε γραφικά την τιμή που θα βρείτε

Λύση

i)

$$e^{-0,5x} = \frac{1}{e^{0,5x}} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^x}} \text{ οπότε}$$

$$\text{για } x = 0 \text{ είναι } e^{-0,5 \cdot 0} = 1,$$

$$\text{για } x = 1 \text{ είναι } e^{-0,5 \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,606$$

$$\text{για } x = 2 \text{ είναι } e^{-0,5 \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{e^2}} \approx 0,368$$

$$\text{για } x = 3 \text{ είναι } e^{-0,5 \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \approx 0,223$$

$$\text{για } x = 4 \text{ είναι } e^{-0,5 \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{e^4}} \approx 0,135$$

$$\text{για } x = 5 \text{ είναι } e^{-0,5 \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{e^5}} \approx 0,082$$

ii)

$$\alpha) \frac{I(x)}{I_0} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\beta) \frac{I(x)}{I_0} = 0,1 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 0,1$$

από το (i) ερώτημα ο ζητούμενος πλησιέστερος ακέραιος φαίνεται να είναι ο $x = 5$

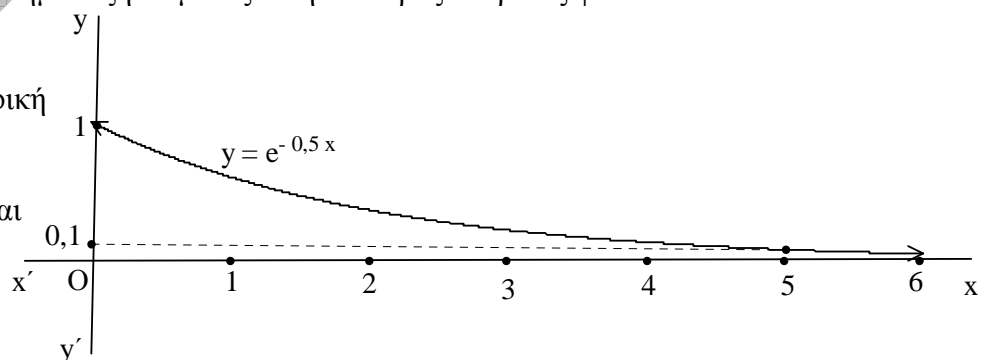
iii)

Από την γραφική

παράσταση

επιβεβαιώνεται

η τιμή $x = 5$



10.

Η θερμοκρασία $T(t)$ (σε $^{\circ}\text{C}$) ενός βραστήρα κατέχεται μέχρι να φτάσει την θερμοκρασία T_0 ενός δωματίου σύμφωνα με τον τύπο

$$T(t) = T_0(1 + e^{-2t}), \quad t \geq 0$$

i) Να υπολογίσετε το e^{-2t} για $t = 0, 1, 2, 3$

ii) Να βρείτε την τιμή του t στον πλησιέστερο ακέραιο για την οποία ο λόγος

$$\frac{T(t)}{T_0} \text{ είναι } \alpha) 1,1, \quad \beta) 2$$

Λύση

i)

$$\text{για } t = 0 \text{ είναι } e^{-2 \cdot 0} = 1,$$

$$\text{για } t = 1 \text{ είναι } e^{-2 \cdot 1} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135$$

$$\text{για } t = 2 \text{ είναι } e^{-2 \cdot 2} = \frac{1}{e^4} \approx 0,018,$$

$$\text{για } t = 3 \text{ είναι } e^{-2 \cdot 3} = \frac{1}{e^6} \approx 0,002$$

ii)

$$\frac{T(t)}{T_0} = 1 + e^{-2t} \text{ οπότε}$$

$$\alpha) \frac{T(t)}{T_0} = 1,1 \Leftrightarrow 1 + e^{-2t} = 1,1 \Leftrightarrow e^{-2t} = 0,1$$

Από το (i) ερώτημα φαίνεται ότι ο πλησιέστερος ακέραιος για τον οποίο είναι

$$\frac{T(t)}{T_0} = 1,1 \text{ είναι ο } t = 1$$

$$\beta) \text{ Προφανώς } \frac{T(t)}{T_0} = 2 \Leftrightarrow t = 0$$

11.

Πυκνωτής χωρητικότητας C σε F έχει φορτίο q_0 σε Cb . Αν συνδέσουμε τον πυκνωτή με αντίσταση R σε Ω το φορτίο του πυκνωτή ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $q(t) = q_0 e^{-t/RC}$, όπου το t μετράται σε δευτερόλεπτα

i) Με μία πρόχειρη γραφική παράσταση να δείξετε πως μεταβάλλεται το φορτίο q ως προς τον χρόνο t

ii) Να βρείτε τις τιμές του t της μορφής $k RC$, k ακέραιος μετά τις οποίες το φορτίο

γίνεται α) $\frac{1}{2} q_0$, β) $\frac{1}{10} q_0$

Λύση

i)

Συνάρτηση $q(t)$ ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής μεταβολής με σταθερά

$c = -\frac{1}{RC} < 0$ επομένως είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν στον άξονα των χρόνων επιλέξουμε ως μονάδα το RC έχουμε την διπλανή γραφική παράσταση

ii)

Από την διπλανή γραφική παράσταση φαίνεται ότι το φορτίο γίνεται

α) Μικρότερο από $\frac{1}{2} q_0$ όταν

$k = 1, 2, 3, \dots$

β) Μικρότερο από $\frac{1}{10} q_0$ όταν

$k = 3, 4, \dots$

