ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ΟΜΑΔΑΣ) 4^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 154 - 155

1.

Με τη βοήθεια της ισότητας $(x^2+x+1)(x-1) = x^3-1$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^{3\nu}+x^{3\mu+1}+x^{3\rho+2}$ διαιρείτε με το πολυώνυμο x^2+x+1.
(ν, μ, ρ θετικοί ακέραιοι)

Λύση

Θεωρούμε τη διαφορά

$$
\begin{aligned}
P(x)-(x^2+x+1) &= x^{3\nu}+x^{3\mu+1}+x^{3\rho+2} - x^2-x-1\\
&= (x^{3\rho+2}-x^2)+(x^{3\mu+1}-x)+(x^{3\nu}-1)\\
&= (x^2x^{3\rho}-x^2)+(xx^{3\mu}-x)+(x^{3\nu}-1)\\
&= x^2(x^{3\rho}-1)+x(x^{3\mu}-1)+(x^{3\nu}-1)\\
&= x^2\left[\left(x^3\right)^{\rho}-1\right]+x\left[\left(x^3\right)^{\mu}-1\right]+\left[\left(x^3\right)^{\nu}-1\right]\\
&= x^2(x^3-1)\,\Pi_1(x)+x(x^3-1)\,\Pi_2(x)+(x^3-1)\,\Pi_3(x)\\
&= (x^3-1)\,[x^2\,\Pi_1(x)+x\,\Pi_2(x)+\Pi_3(x)]\\
&= (x^3-1)\,\Sigma(x)\\
&= (x-1)(x^2+x+1)\,\Sigma(x)\\
&= (x^2+x+1)\,\Phi(x) \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
P(x)-(x^2+x+1) = (x^2+x+1)\,\Phi(x) \quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
P(x) &= (x^2+x+1)+(x^2+x+1)\,\Phi(x)\\
P(x) &= (x^2+x+1)\,[1+\Phi(x)]\\
P(x) &= (x^2+x+1)\,\Omega(x)
\end{aligned}
$$

2.

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

i) $f(x) = \nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^{\nu} + 1$ διαιρείται με το $(x-1)^2$. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

ii) $g(x) = (\nu-2)x^{\nu} - \nu\, x^{\nu-1} + \nu x - \nu + 2$ διαιρείται με το $(x-1)^3$.

Λύση

i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^{\nu} + 1 \\ &= \nu x^{\nu+1} - \nu x^{\nu} - x^{\nu} + 1 \\ &= \nu x^{\nu}(x-1) - (x^{\nu}-1) \\ &= \nu x^{\nu}(x-1) - (x-1)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . + x + 1) \\ &= (x-1)(\nu x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \ . \ . \ . - x - 1) \end{aligned}$$

Θέτουμε $\varphi(x) = \nu x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \ . \ . \ . - x - 1$. Τότε

$$f(x) = (x-1)\,\varphi(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι $\varphi(1) = \nu\cdot 1 - 1 - 1 - \ . \ . \ . - 1 = \nu - \nu = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) = (x-1)\,\Pi(x)$

$(1) \;\Rightarrow\; f(x) = (x-1)\,(x-1)\,\Pi(x)$

$f(x) = (x-1)^2\,\Pi(x)$ άρα το $f(x)$ διαιρείται με το $(x-1)^2$

Για να βρούμε το πηλίκο, γράφουμε σχήμα Horner στο $\varphi(x)$ και για $\rho = 1$

ν	-1	-1	. . .	-1	-1		1
	ν	$\nu-1$	. .	$\nu-\nu+2$	1		
ν	$\nu-1$	$\nu-2$		1	0		

Επομένως το πηλίκο είναι $\Pi(x) = \nu x^{\nu-1} + (\nu-1)x^{\nu-2} + \ . \ . \ . + 1$

ii)

$$\begin{aligned} g(x) &= (\nu-2)x^{\nu} - \nu\, x^{\nu-1} + \nu x - \nu + 2 \\ &= \nu x^{\nu} - 2x^{\nu} - \nu\, x^{\nu-1} + \nu x - \nu + 2 \\ &= (\nu x^{\nu} - \nu\, x^{\nu-1}) - (2x^{\nu} - 2) + (\nu x - \nu) \\ &= \nu\, x^{\nu-1}(x-1) - 2\,(x^{\nu}-1) + \nu\,(x-1) \\ &= \nu\, x^{\nu-1}(x-1) - 2\,(x-1)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . + x + 1) + \nu\,(x-1) \\ &= (x-1)\,[\,\nu\, x^{\nu-1} - 2\,(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . + x + 1) + \nu\,] \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \nu\, x^{\nu-1} - 2\,(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . + x + 1) + \nu \\ &= \nu\, x^{\nu-1} - 2\,x^{\nu-1} - 2\,x^{\nu-2} - \ . \ . \ . - 2x - 2 + \nu \\ &= (\nu-2)\,x^{\nu-1} - 2\,x^{\nu-2} - \ . \ . \ . - 2x + (\nu-2) \end{aligned}$$

Τότε $g(x) = (x-1)\,\varphi(x) \qquad \textbf{(2)}$

Σχήμα Horner στο $\varphi(x)$ για $\rho = 1$

$\nu-2$	-2	-2	.	.	.	-2	$\nu-2$	1
	$\nu-2$	$\nu-4$				$\nu-2(\nu-2)$	$-\nu+2$	
$\nu-2$	$\nu-4$	$\nu-6$				$\nu-2(\nu-1)$	0	

Άρα $\varphi(x) = (x-1)\,[(\nu-2)\ x^{\nu-2} + (\nu-4)\ x^{\nu-3} + \ .\ \ .\ \ .\ + (\nu-2(\nu-1))]$

Έστω $\omega(x) = (\nu-2)\ x^{\nu-2} + (\nu-4)\ x^{\nu-3} + (\nu-6)\ x^{\nu-4}\ \ .\ \ .\ \ .\ + (\nu-2(\nu-1))$

Τότε $\varphi(x) = (x-1)\,\omega(x)$

(2) $\Rightarrow$ $g(x) = (x-1)\,(x-1)\,\omega(x) = (x-1)^2\ \omega(x)$ **(3)**

$$\omega(1) = (\nu-2)\,1^{\nu-2} + (\nu-4)\,1^{\nu-3} + (\nu-6)\,1^{\nu-4}\ \ .\ \ .\ \ .\ + [\nu-2(\nu-1)]$$
$$= (\nu-2) + (\nu-4) + (\nu-6)\ \ .\ \ .\ \ .\ + [\nu-2(\nu-1)]$$

άθροισμα ν – 1 όρων αριθμητικής προόδου

$$= \frac{\nu-2\ +\ \nu-2(\nu-1)}{2}\,(\nu-1)$$

$$= \frac{\nu-2\ +\ \nu-2\nu+2}{2}\,(\nu-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(x) = (x-1)\,\sigma(x)$$

(3) $\Rightarrow$ $g(x) = (x-1)^2\,(x-1)\,\sigma(x) = (x-1)^3\ \sigma(x)$

3.i)

Να λύσετε την εξίσωση $x^4+2x^3+2x+1=0$

Λύση

Προφανώς είναι $x \neq 0$, αφού το 0 δεν επαληθεύει την εξίσωση.

Διαιρούμε τα δύο μέλη με x^2.

Η εξίσωση γίνεται $x^2+2x+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=y$. Τότε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

Η εξίσωση γίνεται $y^2-2+2y=0 \Leftrightarrow y^2+2y-2=0$

$\Delta=4+8=12$, $\quad y=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$ ή $-1+\sqrt{3}$

α) Όταν $y=-1-\sqrt{3} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{3}$

$$x^2+1=(-1-\sqrt{3})\,x$$

$$x^2+(1+\sqrt{3})\,x+1=0$$

$\delta=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4=1+2\sqrt{3}+3-4=2\sqrt{3}$, $\quad x=\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$

β) Όταν $y=-1+\sqrt{3} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{3}$

$$x^2+1=(-1+\sqrt{3})\,x$$

$$x^2+(1-\sqrt{3})\,x+1=0$$

$\delta=\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4=1-2\sqrt{3}+3-4=-2\sqrt{3}<0$

3.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

Λύση

Προφανώς είναι $x \neq 0$, αφού το 0 δεν επαληθεύει την εξίσωση.

Διαιρούμε τα δύο μέλη με x^2.

Η εξίσωση γίνεται $x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$x^2+\frac{1}{x^2} + x+\frac{1}{x} - 4 = 0$$

Θέτουμε $x+\frac{1}{x} = y$ **(1)** Τότε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = y^2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2 = y^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2} = y^2-2$$

Η εξίσωση γίνεται $y^2-2+y-4 = 0$

$$y^2 + y-6=0$$

$$y=-3 \quad ή \quad y=2$$

α) Όταν $y=-3$, η (1) $\Leftrightarrow$ $x+\frac{1}{x} = -3$

$$x^2+1=-3x$$

$$x^2+3x+1=0$$

$\Delta = 9-4=5$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

β) Όταν $y=2$, η (1) $\Leftrightarrow$ $x+\frac{1}{x} = 2$

$$x^2+1=2x$$

$$x^2-2x+1=0$$

$\Delta = 4-4=0$, $x=1$

4.i)

Να λύσετε την εξίσωση $x^4+x^3-16x^2-2x+4=0$

Λύση

Προφανώς είναι $x \neq 0$, αφού το 0 δεν επαληθεύει την εξίσωση.

Διαιρούμε τα δύο μέλη με x^2.

Η εξίσωση γίνεται $x^2+x-16-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \quad \Leftrightarrow$

$$x^2+\frac{4}{x^2} + x-\frac{2}{x} - 16 = 0$$

Θέτουμε $x-\frac{2}{x}=y$ **(1)** Τότε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4=y^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+4$$

Η εξίσωση γίνεται $y^2+4+y-16=0$

$$y^2+y-12=0$$

$$y=-4 \quad ή \quad y=3$$

α) Όταν $y=-4$, η (1) $\Leftrightarrow$ $x-\frac{2}{x}=-4$

$$x^2-2=-4x$$

$$x^2+4x-2=0$$

$$\Delta = 16+8=24, \qquad x=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{6}}{2}=-2\pm\sqrt{6}$$

β) Όταν $y=3$, η (1) $\Leftrightarrow$ $x-\frac{2}{x}=3$

$$x^2-2=3x$$

$$x^2-3x-2=0$$

$$\Delta = 9+8=17, \qquad x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

4.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0$

Λύση

Προφανώς είναι $x \neq 0$, αφού το 0 δεν επαληθεύει την εξίσωση.

Διαιρούμε τα δύο μέλη με x^2.

Η εξίσωση γίνεται $x^2+8x+13-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow$

$$x^2+\frac{1}{x^2} + 8(x-\frac{1}{x}) + 13 = 0$$

Θέτουμε $x-\frac{1}{x} = y$ **(1)** Τότε $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = y^2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2 = y^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2} = y^2+2$$

Η εξίσωση γίνεται $y^2+2+8y+13 = 0$

$$y^2+8y+15=0$$

$$y=-3 \text{ ή } y=-5$$

α) Όταν $y=-3$ η (1) $\Leftrightarrow$ $x-\frac{1}{x} = -3$

$$x^2-1=-3x$$

$$x^2+3x-1=0$$

$\Delta = 9+4 = 13$, $x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

β) Όταν $y=-5$ η (1) $\Leftrightarrow$ $x-\frac{1}{x} = -5$

$$x^2-1=-5x$$

$$x^2+5x-1=0$$

$\Delta = 25+4 = 29$, $x = \frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$

5.

Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^2+2x-1\right)^2-3\left(x^2+2x+3\right)+14=0$

Λύση

Θέτουμε $x^2+2x-1=y$, οπότε $x^2+2x+3 = y+4$

Η εξίσωση γίνεται $y^2-3(y+4)+14=0$

$y^2-3y-12+14=0$

$y^2-3y+2=0$

$\Delta = 9-8 = 1$, $y = \dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \dfrac{3\pm 1}{2} = 2$ ή 1

α) Όταν $y = 2 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 2$

$x^2+2x-3 = 0$

$\Delta = 4+12 = 16$, $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \dfrac{-2\pm 4}{2} = 1$ ή -3

β) Όταν $y = 1 \Leftrightarrow x^2+2x-1=1$

$x^2+2x-2 = 0$

$\Delta = 4+8 = 12$, $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$

6.

Να βρείτε τα α, β για τα οποία το πολυώνυμο $x^5+3x^2+\alpha x+\beta$ διαιρούμενο με το x^2-2 δίνει υπόλοιπο $5x+8$.

Λύση

Είναι $x^2-2 = x^2-(\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Ταυτότητα διαίρεσης: $x^5+3x^2+\alpha x+\beta = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\,\Pi(x)+5x+8$ **(1)**

Η (1) για $x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^5+3(\sqrt{2})^2+\alpha\sqrt{2}+\beta = 0+5\sqrt{2}+8$

$4\sqrt{2}+6+\alpha\sqrt{2}+\beta = 5\sqrt{2}+8$

$\alpha\sqrt{2}+\beta = \sqrt{2}+2$ **(2)**

Η (1) για $x = -\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2})^5+3(-\sqrt{2})^2+\alpha(-\sqrt{2})+\beta = 0+5(-\sqrt{2})+8$

$-4\sqrt{2}+6-\alpha\sqrt{2}+\beta = -5\sqrt{2}+8$

$\alpha\sqrt{2}-\beta = \sqrt{2}-2$ **(3)**

Σύστημα των (2), (3)

(2) + (3) $\Rightarrow 2\alpha\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 1$

(2) – (3) $\Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$

7.

Αν $P(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \ldots + 12x - 1$ να υπολογιστούν οι τιμές $P(11)$ και $P(13)$

Λύση

Με το σχήμα Horner για x = 11 έχουμε

1	–12	12	–12	……	12	–1	x = 1
…	11	–11	11	……	–11	11	
1	–1	1	–1	……	1	10	

Κάνοντας την ίδια δουλειά για x = 13 διαπιστώνουμε ότι οι πράξεις είναι πολλές για αυτό κάνουμε την παρακάτω δουλειά

$P(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \ldots - 12x^2 + 12x - 1 =$

$= x^{17} - 1 - 12x(x^{15} - x^{14} + x^{13} - \ldots + x - 1)$

Όμως η παράσταση $x^{15} - x^{14} + x^{13} - \ldots + x - 1$ είναι άθροισμα 16 όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο $\alpha_1 = x^{15}$ και λόγο $\lambda = -x^{-1}$ οπότε

$x^{15} - x^{14} + x^{13} - \ldots + x - 1 = \dfrac{\alpha_1(\lambda^{16} - 1)}{\lambda - 1} = \dfrac{x^{15}(x^{-16} - 1)}{-x^{-1} - 1} = \dfrac{x^{16} - 1}{x + 1}$ άρα

$P(x) = x^{17} - 1 - 12x \cdot \dfrac{x^{16} - 1}{x + 1}$ συνεπώς

$P(13) = 13^{17} - 1 - 12 \cdot 13 \dfrac{13^{16} - 1}{14} = 13^{17} - 1 - 6 \cdot \dfrac{13^{17} - 13}{7}$ με ένα κομπιουτεράκι υπολογίζουμε το 13^{17} και επομένως το $P(13)$

8.

Ο ήλιος ενός πλανητικού συστήματος γίνεται άλλοτε θερμότερος και άλλοτε ψυχρότερος . Έχει εκτιμηθεί ότι η θερμοκρασία T σε ^{o}C στην επιφάνεια ενός πλανήτη του συστήματος μετά από x εκατομμύρια χρόνια θα είναι

$T = 10x^3 - 100x^2 + 270x - 180$.

i) Μετά από πόσα χρόνια θα έρθει το τέλος των παγετώνων στον πλανήτη;

ii) Πότε θα αρχίσει ο επόμενος παγετώνας και πόσο θα διαρκέσει;

Λύση

Επειδή το νερό αρχίζει να γίνεται πάγος όταν η θερμοκρασία μειούμενη γίνει $0^{o}C$ και συνεχίσει να μειώνεται επίσης ο πάγος αρχίζει να γίνεται νερό όταν η θερμοκρασία αυξανόμενη γίνει $0^{o}C$ και συνεχίσει να αυξάνεται , για να απαντήσουμε στο παραπάνω πρόβλημα θα πρέπει να μελετήσουμε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση της θερμοκρασίας $T(x) = 10x^3 - 100x^2 + 270x - 180$

Είναι $T(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - 100x^2 + 270x - 180 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^3 - 10x^2 + 27x - 18 = 0$$

εφαρμόζοντας σχήμα Horner για x = 1 βρίσκουμε ότι

$x^3 - 10x^2 + 27x - 18 = (x-1)(x^2 - 9x + 18)$ οπότε

$T(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$ ή $x = 6$

Για να δούμε την μεταβολή της θερμοκρασίας με την πάροδο του χρόνου σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης T(x) αυτή είναι η παρακάτω

i)

Με την βοήθεια της διπλανής γραφικής παράστασης διαπιστώνουμε ότι οι πάγοι θα λειώσουν σε σε 1 εκατομμύριο χρόνια από σήμερα

ii)

Οι πάγοι θα παραμείνουν λειωμένοι κατά 3–1= 2 εκατομμύρια χρόνια , επομένως ο επόμενος παγετώνας θα αρχίσει σε 3 εκατομμύρια χρόνια από σήμερα και θα διαρκέσει 6 –3 = 3 εκατομμύρια χρόνια