4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 139 – 140

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να κάνετε τη διαίρεση $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +6x^2 & -17x & +20 & x+3 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2-3x-8 \\
\cline{1-4}
 & -3x^2 & -17x & +20 & \\
 & +3x^2 & +9x & & \\
\cline{2-4}
 & & -8x & +20 & \\
 & & +8x & +24 & \\
\cline{3-4}
 & & & 44 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $3x^3+6x^2-17x+20=(x+3)(3x^2-3x-8)+44$

1.ii)

Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4-81):(x-3)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & & -81 & x-3 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +3x^3 & & & & x^3+3x^2+9x+27 \\
\cline{1-5}
 & 3x^3 & & & -81 & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 9x^2 & & -81 & \\
 & & -9x^2 & +27x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 27x & -81 & \\
 & & & -27x & +81 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $x^4-81=(x-3)(x^3+3x^2+9x+27)$

1.iii)

Να κάνετε τη διαίρεση $(24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15) : (6x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

$$
\begin{array}{rrrr|l}
24x^5 & +20x^3 & -16x^2 & -15 & 6x^2+5 \\
\cline{5-5}
-24x^5 & -20x^3 & & & 4x^3-\frac{8}{3} \\
\cline{1-4}
 & & -16x^2 & -15 & \\
 & & 16x^2 & +\frac{40}{3} & \\
\cline{3-4}
 & & & -\frac{5}{3} &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15 = (6x^2 + 5)(4x^3 - \frac{8}{3}) - \frac{5}{3}$

1.iv)

Να κάνετε τη διαίρεση $(2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2) : (x^2 + 2x - 3)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+4x^3-5x^2+3x-2 & x^2+2x-3 \\
\cline{2-2}
-2x^4-4x^3+6x^2 & 2x^2+1 \\
\cline{1-1}
x^2+3x-2 & \\
-x^2-2x+3 & \\
\cline{1-1}
x+1 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα είναι $2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = (x^2 + 2x - 3)(2x^2 + 1) + x + 1$

1.v)

Να κάνετε τη διαίρεση $x^4 : (x-1)^3$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

Είναι $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 & x^3-3x^2+3x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+3x^3-3x^2+x} & x+3 \\
\quad 3x^3-3x^2+x & \\
\quad \underline{-3x^3+9x^2-9x+3} & \\
\qquad 6x^2-8x+3 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $x^4 = (x^3-3x^2+3x-1)(x+3) + 6x^2-8x+3$

$x^4 = (x-1)^3\,(x+3) + 6x^2-8x+3$

1.vi)

Να κάνετε τη διαίρεση $(x^5+7):(x^3-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + \qquad 7 & x^3-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5+x^2} & x^2 \\
\qquad x^2+\ 7 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $x^5+7 = (x^3-1)\,x^2 + x^2 + 7$

2.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2):(x+1)$

Λύση

Έστω $P(x) = 18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2$.

$\upsilon = P(-1) = 18\,(-1)^{80} - 6(-1)^{50} + 4(-1)^{20} - 2 = 18 - 6 + 4 - 2 = 14$

3.

Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x) = k^2x^4+3kx^2-4$

Λύση

Πρέπει και αρκεί $g(1)=0 \Leftrightarrow k^2 1^4+3k1^2-4=0$

$k^2+3k-4=0$

$\Delta = 9+16=25$ $\qquad k = \dfrac{-3\pm 5}{2} = 1$ ή -4

4.i)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(-x^3+75x-250):(x+10)$

Λύση

–1	0	75	–250	–10
	10	–100	250	
–1	10	–25	0	

Άρα $\pi(x) = -x^2+10x-25$ και $\upsilon = 0$

4.ii)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^3+512):(x+8)$

Λύση

1	0	0	512	– 8
	– 8	64	– 512	
1	– 8	64	0	

Άρα $\pi(x) = x^2-8x+64$ και $\upsilon = 0$

4.ii)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^5+1):(x-1)$

Λύση

1	0	0	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	2	

Άρα $\pi(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$ και $\upsilon = 2$

4.iv)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $-3x^4:(x-2)$

Λύση

–3	0	0	0	0	2
	–6	–12	–24	– 48	
–3	–6	–12	–24	– 48	

Άρα $\pi(x) = -3x^3-6x^2-12x-24$ και $\upsilon = -48$

4.v)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^3+16x^2-23x-15):(x+\frac{1}{2})$

Λύση

4	16	–23	–15	$-\frac{1}{2}$
	–2	–7	15	
4	14	–30	0	

Άρα $\pi(x) = 4x^2+14x-30$ και $\upsilon = 0$

5.

Αν $P(x) = -2x^3 - 2x^2 - x + 2409$, να βρείτε το $P(-11)$

Λύση

–2	–2	–1	2409	–11
	22	–220	2431	
–2	20	–221	4840	

Άρα $P(-11) = 4840$

6.i)

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x+3$ είναι παράγοντας του

$$P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$

Λύση

1	0	–25	0	144	–3
	–3	9	48	–144	
1	–3	–16	48	0	

$υ = 0$ άρα το $x+3$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$

6.ii)

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x - \frac{1}{4}$ είναι παράγοντας του

$$P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$$

Λύση

16	–8	9	14	– 4	$\frac{1}{4}$
	4	–1	2	4	
16	– 4	8	16	0	

$υ = 0$ άρα το $x - \frac{1}{4}$ είναι παράγοντας του $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$

6.iii)

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1-\sqrt{3}$ είναι παράγοντας του

$$P(x) = x^3-3x^2+2$$

Λύση

Είναι $x-1-\sqrt{3} = x-(1+\sqrt{3})$

1	-3	0	2	$1+\sqrt{3}$
	$1+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	-2	
1	$-2+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	0	

$\upsilon = 0$ άρα το $x-1-\sqrt{3}$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^3-3x^2+2$

7.

Αν ν είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι το $x+y$ είναι παράγοντας του $x^\nu - y^\nu$.

Λύση

Θεωρούμε τα $P(x) = x^\nu - y^\nu$, $\pi(x) = x+y = x-(-y)$ ως πολυώνυμα του x

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):\pi(x)$ είναι

$\upsilon = P(-y) = (-y)^\nu - y^\nu$

Αλλά $(-y)^\nu = y^\nu$ αφού ν άρτιος. Άρα $\upsilon = 0$

Επομένως το $x+y$ είναι παράγοντας του $x^\nu - y^\nu$.

8.

Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

i) $P(x) = 4x^4+7x^2+12$ **ii)** $Q(x) = -5x^6-3x^2-4$

Λύση

i)

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$ είναι

$\upsilon = P(\rho) = 4\rho^4+7\rho^2+12 > 0$

Επομένως το $x-\rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$

ii)

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x-\rho)$ είναι

$\upsilon = Q(\rho) = -5\rho^6-3\rho^2-4 < 0$

Επομένως το $x-\rho$ δεν είναι παράγοντας του $Q(x)$

9.

Αν ο ν είναι περιττός θετικός ακέραιος, τότε το $x+1$ είναι παράγοντας του $x^{\nu}+1$.
Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $(x^{\nu}+1):(x+1)$

Λύση

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & & 1 & -1 \\
 & -1 & 1 & -1\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 & & -1 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1 & & 0 &
\end{array}
$$

$\upsilon=0 \;\Rightarrow\;$ το $x+1$ είναι παράγοντας του $x^{\nu}+1$.

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι $x^{\nu-1}-x^{\nu-2}+x^{\nu-3}-\;.\;.\;.\;-x+1$.
Άρα η ταυτότητα της διαίρεσης $(x^{\nu}+1):(x+1)$ είναι
$x^{\nu}+1=(x+1)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}+x^{\nu-3}-\;.\;.\;.\;-x+1)$

10.i)

Να κάνετε τη διαίρεση $(3x^2-2\alpha x-8\alpha^2):(x-2\alpha)$

Λύση

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2-2\alpha x-8\alpha^2 & \underline{x-2\alpha} \\
\underline{-3x^2+6\alpha x\qquad} & 3x+4\alpha \\
4\alpha x-8\alpha^2 & \\
\underline{-4\alpha x+8\alpha^2} & \\
0 &
\end{array}
$$

10.ii)

Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3+\alpha x^2-\alpha^2 x-\alpha^3):(x+\alpha)$

Λύση

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+\alpha x^2-\alpha^2 x-\alpha^3 & \underline{x+\alpha} \\
\underline{-x^3-\alpha x^2\qquad\qquad} & x^2-\alpha^2 \\
-\alpha^2 x-\alpha^3 & \\
\underline{\alpha^2 x+\alpha^3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι, αν το ν είναι παράγοντας του μ, τότε και το $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$ είναι παράγοντας του $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$, (μ, ν θετικοί ακέραιοι).

Λύση

ν είναι παράγοντας του μ $\Rightarrow$ $\mu = k\cdot\nu$, όπου k θετικός ακέραιος. Τότε

$$x^{\mu}-\alpha^{\mu} = x^{k\nu}-\alpha^{k\nu} = \left(x^{\nu}\right)^{k}-\left(\alpha^{\nu}\right)^{k} =$$

$$= (x^{\nu}-\alpha^{\nu})\left[\left(x^{\nu}\right)^{k-1}+\left(x^{\nu}\right)^{k-2}\alpha^{\nu}+\ ...\ +\left(\alpha^{\nu}\right)^{k-1}\right] \quad \Rightarrow$$

το $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$ είναι παράγοντας του $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$.

2.

i) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\alpha x+\beta,\ \ \alpha\neq 0$ είναι $\upsilon = P(-\frac{\beta}{\alpha})$.

ii) Να βρείτε τις συνθήκες, για τις οποίες το πολυώνυμο $\alpha x^3+\beta$ διαιρείται με το $\alpha x+\beta$.

Λύση

i)

Με την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (\alpha x + \beta)$ έχουμε

$P(x) = (\alpha x + \beta)\,\pi(x) + \upsilon$ **(1)**

Η (1) για $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ $\Rightarrow$

$$P(-\frac{\beta}{\alpha}) = \left[\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta\right]\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \upsilon$$

$$P(-\frac{\beta}{\alpha}) = [-\beta+\beta]\,\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \upsilon$$

$$P(-\frac{\beta}{\alpha}) = 0\cdot\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \upsilon$$

$$P(-\frac{\beta}{\alpha}) = \upsilon$$

ii)

Έστω $P(x) = \alpha x^3+\beta$

Το πολυώνυμο $\alpha x^3+\beta$ διαιρείται με το $\alpha x+\beta$ $\Leftrightarrow$

το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (\alpha x+\beta)$ είναι 0, και λόγω του i),

$$P(-\frac{\beta}{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3+\beta = 0$$

$$\alpha\left(-\frac{\beta^3}{\alpha^3}\right)+\beta = 0$$

$$-\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\beta = 0$$

$$-\beta^3+\alpha^2\beta = 0$$

$$\beta(\alpha^2-\beta^2) = 0$$

$$\beta=0 \ \text{ ή } \ \alpha^2-\beta^2 = 0$$

$$\beta=0 \ \text{ ή } \ \alpha^2=\beta^2 \Leftrightarrow \beta=0 \ \text{ ή } \ \alpha=\beta \ \text{ ή } \ \alpha=-\beta$$

3.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

Λύση

Σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$

2	–6	5	–3	2	1
	2	– 4	1	– 2	
2	– 4	1	– 2	0	

Οπότε $P(x) = (x-1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2)$

Θέτουμε $2x^3 - 4x^2 + x - 2 = \pi(x)$. Τότε $P(x) = (x-1)\,\pi(x)$ **(1)**

Σχήμα Horner για τη διαίρεση $\pi(x) : (x-2)$

2	–4	1	–2	2
	4	0	2	
2	0	1	0	

Οπότε $\pi(x) = (x-2)(2x^2+1)$

(1) $\Rightarrow$ $P(x) = (x-1)(x-2)(2x^2+1)$ $\Rightarrow$

το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και το πηλίκο είναι $2x^2+1$

4.

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^{2\nu} - x^{2\nu} - 2x - 1,\ \ \nu \neq 0$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $2x^3 + 3x^2 + x$.

Λύση

Είναι $2x^3 + 3x^2 + x = x(2x^2 + 3x + 1)$.

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 3x + 1$, $\quad -1$ και $-\dfrac{1}{2}$

Άρα οι ρίζες του $2x^3 + 3x^2 + x$ είναι $0,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}$

και οι παράγοντές του είναι $x,\quad x+1,\quad x+\dfrac{1}{2}$

$P(0) = (0+1)^{2\nu} - 0^{2\nu} - 2\cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow$
το πολυώνυμο $x - 0 = x$ είναι παράγοντας του $P(x)$

$P(-1) = (-1+1)^{2\nu} - (-1)^{2\nu} - 2\cdot(-1) - 1 = 0 - 1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow$
το πολυώνυμο $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$

$P(-\frac{1}{2}) = \left((-\frac{1}{2})+1\right)^{2\nu} - (-\frac{1}{2})^{2\nu} - 2(-\frac{1}{2}) - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2\nu} + 1 - 1 = 0 \Rightarrow$

το πολυώνυμο $x+\dfrac{1}{2}$ είναι παράγοντας του $P(x)$

5.

Να υπολογίσετε τους $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, για τους οποίους το $P(x) = \alpha x^{\nu+1} + \beta x^{\nu} + 1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Λύση

Το $P(x)$, για να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, πρέπει να έχει παράγοντα

και το $x-1 \quad \Rightarrow \quad P(1) = 0$

$$\alpha \cdot 1^{\nu+1} + \beta \cdot 1^{\nu} + 1 = 0$$

$$\alpha + \beta + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -(\alpha+1). \quad \textbf{(1)} \qquad \text{Τότε}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha x^{\nu+1} - (\alpha+1)x^{\nu} + 1 = \alpha x^{\nu+1} - \alpha x^{\nu} - x^{\nu} + 1 \\ &= \alpha x^{\nu}(x-1) - (x^{\nu}-1) \\ &= \alpha x^{\nu}(x-1) - (x-1)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . \ + 1) \\ &= (x-1)\left[\alpha x^{\nu} - \left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . \ + 1\right)\right] \end{aligned}$$

Θέτουμε $\left[\alpha x^{\nu} - \left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ . \ . \ . \ + 1\right)\right] = \pi(x)$. Οπότε $P(x) = (x-1)\,\pi(x)$.

Το $P(x)$, για να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, πρέπει, το $\pi(x)$ να έχει παράγοντα

το $x-1 \quad \Rightarrow \quad \pi(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\alpha \cdot 1^{\nu} - \left(1^{\nu-1} + 1^{\nu-2} + \ . \ . \ . \ + 1\right)\right] = 0$

$$\alpha - (1 + 1 + \ . \ . \ . \ + 1) = 0$$

$$\alpha - \nu = 0$$

$$\alpha = \nu$$

Η (1) $\quad \Rightarrow \quad \beta = -(\nu+1)$