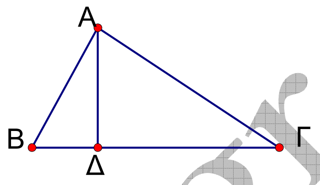
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (Γ΄ΟΜΑΔΑΣ)
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 122 – 124

1.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος του ΑΔ είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ. να αποδείξετε ότι ισχύει εφΒ + εφΓ = 2 εφΒ εφΓ και σφΒ + σφΓ = 2

Λύση.



Από το τρ. ΑΔΒ έχουμε $\text{εφΒ} = \dfrac{ΑΔ}{ΔΒ} \Rightarrow$

$ΔΒ = \dfrac{ΑΔ}{\text{εφΒ}}$ **(1)**

Από το τρ. ΑΔΓ έχουμε $\text{εφΓ} = \dfrac{ΑΔ}{ΔΓ} \Rightarrow$

$ΔΓ = \dfrac{ΑΔ}{\text{εφΓ}}$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $ΔΒ + ΔΓ = ΑΔ\left(\dfrac{1}{\text{εφΒ}} + \dfrac{1}{\text{εφΓ}}\right)$

$$ΒΓ = ΑΔ\,\frac{\text{εφΓ}+\text{εφΒ}}{\text{εφΒεφΓ}}$$

$$2ΑΔ = ΑΔ\,\frac{\text{εφΓ}+\text{εφΒ}}{\text{εφΒεφΓ}}$$

$$2 = \frac{\text{εφΓ}+\text{εφΒ}}{\text{εφΒεφΓ}} \Rightarrow \text{εφΒ} + \text{εφΓ} = 2\,\text{εφΒ εφΓ}$$

Από το τρ. ΑΔΒ έχουμε $\text{σφΒ} = \dfrac{ΒΔ}{ΔΑ}$ **(3)**

Από το τρ. ΑΔΓ έχουμε $\text{σφΓ} = \dfrac{ΓΔ}{ΔΑ}$ **(4)**

(3) + (4) $\Rightarrow$ $\text{σφΒ} + \text{σφΓ} = \dfrac{ΒΔ+ΓΔ}{ΔΑ} = \dfrac{ΒΓ}{ΔΑ} = 2$

2.

Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\frac{εφΒ}{εφΓ} = \frac{ημ^2Β}{ημ^2Γ}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

Λύση.

$$\frac{εφΒ}{εφΓ} = \frac{ημ^2Β}{ημ^2Γ} \Rightarrow εφΒ\ ημ^2Γ = εφΓ\,ημ^2Β \Rightarrow$$

$$\frac{ημΒ}{συνΒ}ημ^2Γ = \frac{ημΓ}{συνΓ}ημ^2Β$$

$$ημΓ\ συνΓ = ημΒ\ συνΒ$$

$$2ημΓ\ συνΓ = 2ημΒ\ συνΒ$$

$$ημ2Γ = ημ2Β \Rightarrow$$

$$2Γ = 2Β \quad ή \quad 2Γ + 2Β = 180^o$$

$$Γ = Β \quad ή \quad Γ + Β = 90^o \Rightarrow Γ = Β \quad ή \quad Α = 90^o$$

3.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ(x, y) του επιπέδου με $x = 1 + 2συνt$, $y = 3 + 2ημt$, βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Κ(1, 3) και ακτίνας ρ = 2.

Λύση.

$$(ΚΜ)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$

$$= (1 + 2συνt - 1)^2 + (3 + 2ημt - 3)^2$$

$$= 4συν^2t + 4ημ^2t = 4(συν^2t + ημ^2t) = 4 .1 = 4 \Rightarrow (ΚΜ) = 2$$

Άρα το σημείο Μ απέχει από το Κ απόσταση 2, επομένως βρίσκεται σε κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας ρ = 2.

4.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 4$

Λύση.

Περιορισμοί : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και $1 + \eta\mu x \neq 0$

$\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + \eta\mu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\sigma\upsilon\nu x\,(1 + \eta\mu x)$

$1 + 2\eta\mu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\sigma\upsilon\nu x\,(1 + \eta\mu x)$

$1 + 2\eta\mu x + 1 = 4\sigma\upsilon\nu x\,(1 + \eta\mu x)$

$2 + 2\eta\mu x = 4\sigma\upsilon\nu x\,(1 + \eta\mu x)$

$1 + \eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x\,(1 + \eta\mu x)$

$(1 + \eta\mu x) - 2\sigma\upsilon\nu x\,(1 + \eta\mu x) = 0$

$(1 + \eta\mu x)(1 - 2\sigma\upsilon\nu x) = 0$

$1 - 2\sigma\upsilon\nu x = 0$

$1 = 2\,\sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

4.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\varphi x}{1-\eta\mu x} = 3$

Λύση.

Περιορισμοί : $\eta\mu x \neq 0$ για να ορίζεται η σφx και

$1 - \eta\mu x \neq 0$ για να ορίζεται το κλάσμα.

$\frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\varphi x}{1-\eta\mu x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\varphi x = 3 - 3\eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu x\,\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = 3 - 3\eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu^2 x = 3\,\eta\mu x - 3\eta\mu^2 x$

$1 - \eta\mu^2 x - 3\,\eta\mu x + 3\eta\mu^2 x = 0$

$2\,\eta\mu^2 x - 3\,\eta\mu x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1, \qquad \eta\mu x = \frac{3 \pm 1}{4} = \frac{1}{2}$ ή 1

(η ρίζα 1 απορρίπτεται από τον περιορισμό)

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$

5.i)

Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $εφx + σφx \geq 2$

Λύση.

$$εφx + σφx \geq 2 \Leftrightarrow εφx + \frac{1}{εφx} \geq 2$$

$$εφ^2x + 1 \geq 2\,εφx$$

$$εφ^2x - 2\,εφx + 1 \geq 0$$

$$(εφx - 1)^2 \geq 0$$ που ισχύει.

5.ii)

Αν $0 \leq α < β < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $εφα < \frac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} < εφβ$

Λύση.

$$εφα < \frac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} \Leftrightarrow \frac{ημα}{συνα} < \frac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ}$$

$$ημα\,συνα + ημα\,συνβ < συνα\,ημα + συνα\,ημβ$$

$$συνα\,ημβ > ημα\,συνβ$$

$$συνα\,ημβ - ημα\,συνβ > 0$$

$$ημ(β - α) > 0$$ που ισχύει αφού $0 < β - α < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} < εφβ \Leftrightarrow$$ (Ακολουθούμε τον ίδιο τρόπο)

6.

Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3} - 2x) = 1$ στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$

Λύση.

$$2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3} - 2x) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3} - 2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3} - 2x) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad \frac{\pi}{3} - 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = -k\pi \quad \acute{\eta} \quad -2x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$x = -k\pi \quad \acute{\eta} \quad x = -k\pi + \frac{\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$$

- Για $x = -k\pi$
  $4\pi < x < 5\pi \Leftrightarrow 4\pi < -k\pi < 5\pi \Leftrightarrow -5 < k < -4$ αδύνατο

- Για $x = -k\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4\pi < -k\pi + \frac{\pi}{3} < 5\pi \Leftrightarrow$

$$4 < -k + \frac{1}{3} < 5 \Leftrightarrow$$

$$4 - \frac{1}{3} < -k < 5 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

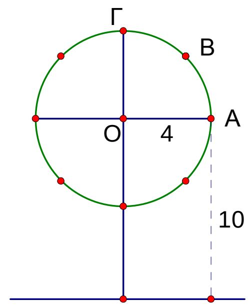
$$\frac{11}{3} < -k < \frac{14}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{14}{3} < k < -\frac{11}{3} \Leftrightarrow k = -4$$

Άρα $x = -(-4)\pi + \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$

7.

Σε ένα λούνα παρκ ο περιστρεφόμενος τροχός έχει ακτίνα 4m, το κέντρο του απέχει από το έδαφος 10m και όταν αρχίζει να κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το ύψος του βαγονιού Α από το έδαφος ύστερα από χρόνο 1 sec, 2 sec, 5 sec και γενικότερα ύστερα από χρόνο t sec. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για το βαγόνι Β.

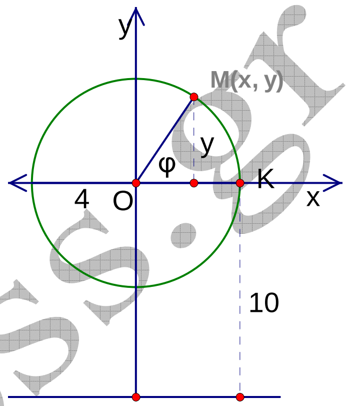


Λύση.

Για το βαγόνι Α.

Έστω Κ η θέση του βαγονιού κατά τη χρονική στιγμή t = 0.
Θεωρούμε σύστημα αξόνων με αρχή Ο, άξονα των x οριζόντιο και άξονα των y κατακόρυφο.
Έστω M(x, y) η θέση του βαγονιού σε χρόνο t sec από την εκκίνηση και φ η γωνία $K\hat{O}M$. Τότε

$$x = 4\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y = 4\text{ημ}\varphi \qquad \textbf{(1)}$$



Είναι φ = 2π σε χρόνο t = 8 sec. Άρα

είναι $\varphi = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ σε χρόνο t = 1 sec και

$\varphi = \frac{\pi\, t}{4}$ σε χρόνο t sec.

(1) $\Rightarrow$ $y = 4\text{ημ}\frac{\pi\, t}{4}$.

Το ύψος του βαγονιού σε t sec είναι $h(t) = 10 + y = 10 + 4\text{ημ}\frac{\pi\, t}{4}$.

Επομένως $h(1) = 10 + 4\text{ημ}\frac{\pi.1}{4} = 10 + 4\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 10 + 2\sqrt{2}$ m

$h(2) = 10 + 4\text{ημ}\frac{\pi.2}{4} = 10 + 4\text{ημ}\frac{\pi}{2} = 10 + 4\,.1 = 14$ m

$h(5) = 10 + 4\text{ημ}\frac{\pi.5}{4} = 10 + 4\,(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 10 - 2\sqrt{2}$ m

Για το βαγόνι Β.

Έστω Λ η θέση του βαγονιού κατά τη χρονική στιγμή t = 0, όπου $K\hat{O}\Lambda = \frac{\pi}{4}$ και

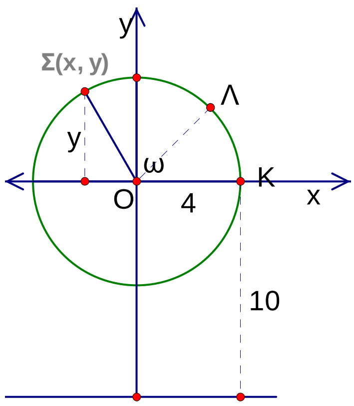
Σ(x, y) η θέση του βαγονιού σε χρόνο t sec από την εκκίνηση.

Ονομάζουμε $K\hat{O}\Sigma = \omega$, οπότε $y = 4\text{ημ}\omega$ **(2)**

Θα είναι $\Lambda\hat{O}\Sigma = K\hat{O}M = \frac{\pi\, t}{4}$.

Άρα $\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\, t}{4}$

Επομένως $h(t) = 10 + y = 10 + 4\text{ημ}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\, t}{4})$.



8.

Να αποδείξετε ότι

i) $σφx - εφx = 2σφ2x$ **ii)** $σφx - 2εφ2x - 4εφ4x - 8σφ8x = εφx$

Λύση

i)

$$σφx - εφx = 2σφ2x \Leftrightarrow \frac{συνx}{ημx} - \frac{ημx}{συνx} = 2\frac{συν2x}{ημ2x}$$

$$\frac{συν^2x - ημ^2x}{ημxσυνx} = 2\frac{συν2x}{2ημxσυνx}$$

$$συν^2x - ημ^2x = συν2x \quad \text{που ισχύει}$$

ii)

Αρκεί να δειχθεί ότι $σφx - εφx - 2εφ2x - 4εφ4x = 8σφ8x$

Είναι $σφx - εφx - 2εφ2x - 4εφ4x = (σφx - εφx) - 2εφ2x - 4εφ4x$

$$\overset{(i)}{=} 2σφ2x - 2εφ2x - 4εφ4x$$

$$\overset{(i)}{=} 2(σφ2x - εφ2x) - 4εφ4x$$

$$= 2\cdot 2σφ4x - 4εφ4x$$

$$= 4(σφ4x - εφ4x)$$

$$\overset{(i)}{=} 4\cdot 2σφ8x = 8σφ8x$$

9.

Με τη βοήθεια του τύπου $ημ3α = 3ημα - 4ημ^3α$ να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0$ **ii)** $8x^3 - 6x - 1 = 0$

Λύση

i)

$$8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = 6x - 8x^3 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 3x - 4x^3$$

Θέτουμε $x = ημα$. Τότε $\frac{\sqrt{2}}{2} = 3ημα - 4ημ^3α \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = ημ3α \Rightarrow ημ3α = ημ45^o \Rightarrow$$

$$3α = 360^o k + 45^o \quad ή \quad 3α = 360^o k + 180^o - 45^o \Rightarrow$$

$$α = 120^o k + 15^o \quad \textbf{(1)} \quad ή \quad α = 120^o k + 135^o \quad \textbf{(2)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Για $k = 0$ η (1) $\Rightarrow α = 15^o \Rightarrow$

  $x = ημα = ημ15^o = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$

  Ελέγχουμε αν ο $\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$ επαληθεύει τη δοσμένη εξίσωση, δηλαδή αν είναι ρίζα της.

  $$8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 8\left(\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^3 - 6\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \sqrt{2}$$

  $$= 8 . 2\sqrt{2}\,\frac{3\sqrt{3} - 3.3 + 3\sqrt{3} - 1}{64} - 6\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \sqrt{2}$$

  $$= \sqrt{2}\,\frac{6\sqrt{3} - 10}{4} - 6\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \sqrt{2}$$

  $$= \sqrt{2}\left(\frac{6\sqrt{3} - 10}{4} - 6\frac{\sqrt{3}-1}{4} + 1\right)$$

  $$= \sqrt{2}\,\frac{6\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3} + 6 + 4}{4} = \sqrt{2} \cdot 0 = 0$$ είναι ρίζα.

- Για $k = 0$ η (2) $\Rightarrow α = 135^o \Rightarrow$

  $x = ημα = ημ135^o = ημ45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  Ελέγχουμε αν ο $\frac{\sqrt{2}}{2}$ επαληθεύει τη δοσμένη εξίσωση, δηλαδή αν είναι ρίζα της.

  $8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 6\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 8\,\frac{2\sqrt{2}}{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$, είναι ρίζα.

- Για $k = -1$ η (1) $\Rightarrow α = -120^o + 15^o = -105^o \Rightarrow$

  $x = ημα = ημ(-105^o) = -ημ105^o = -ημ75^o = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

  Όπως προηγουμένως, αποδεικνύουμε ότι είναι ρίζα.
  Έχουμε βρει τρεις ρίζες της εξίσωσης και επειδή είναι $3^{ου}$ βαθμού, δεν έχει άλλες.

ii)
Με τον ίδιο τρόπο.

10.

Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων M(x, y) με $x = συνθ$ και $y = συν2θ + 1$, όπου $θ \in [0, π]$, είναι το τόξο της παραβολής $y = 2x^2$ με $x \in [-1, 1]$.

Λύση.

$-1 \leq συνθ \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$.

$x = συνθ \Rightarrow x^2 = συν^2θ \Rightarrow 2x^2 = 2συν^2θ = 1 + συν2θ = y$

Αντίστροφα.

Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής $y = 2x^2$ με $x \in [-1, 1]$.

Θέτουμε $x = συνθ$, όπου $θ \in [0, π] \Rightarrow x^2 = συν^2θ$.

Η εξίσωση $y = 2x^2$ γίνεται $y = 2συν^2θ \Rightarrow y = 1 + συν2θ$

11.

Με τη βοήθεια των τύπων $\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\eta\mu x}{5+4\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in(-\pi, \pi)$ παίρνει τιμές

στο διάστημα $\left[0, \dfrac{10}{9}\right]$.

Λύση.

$$1 + \eta\mu x = 1 + \frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{\left(1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)^2}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \quad \textbf{(1)}$$

Θέσαμε $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2} = t$

$$5 + 4\sigma\upsilon\nu x = 5 + 4\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{5+5\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+4-4\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{9+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{9+t^2}{1+t^2} \quad \textbf{(2)}$$

$\dfrac{(1)}{(2)}$: $f(t) = \dfrac{(1+t)^2}{9+t^2}$ Αρκεί να αποδείξουμε ότι $0 \le \dfrac{(1+t)^2}{9+t^2} \le \dfrac{10}{9}$

Η αριστερή ανίσωση είναι προφανής. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(1+t)^2}{9+t^2} \le \frac{10}{9} \Leftrightarrow 9(1 + 2t + t^2) \le 90 + 10t^2$$

$$9 + 18t + 9t^2 \le 90 + 10t^2$$

$$t^2 - 18t + 81 \ge 0 \Leftrightarrow (t-9)^2 \ge 0$$ που ισχύει.

12.

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

Λύση.

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\frac{\pi}{4}\,\eta\mu x$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\eta\mu x$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) = \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1}$$

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1}$$

$$(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1}$$

$$(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1) = 2\,\eta\mu 2x$$

$$(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}) = 2\,\eta\mu 2x$$

$$(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\sqrt{2} = 2\,\eta\mu 2x$$

$$(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu 2x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\eta\mu x = \eta\mu 2x$$

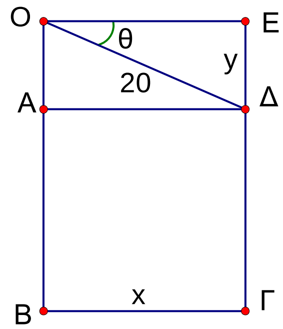
$$\eta\mu\frac{\pi}{4}\,\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\,\eta\mu x = \eta\mu 2x$$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{4} + x) = \eta\mu 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi + 2x \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi + \pi - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} - 2k\pi \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

13.

Ένα γκαράζ σχήματος ορθογωνίου έχει σχεδιασθεί, έτσι ώστε να αποτελείται από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα ορθογώνιο ΟΑΔΕ με ΟΔ = 20m, όπως περιγράφει το διπλανό σχήμα. Για ποια τιμή της γωνίας θ rad το εμβαδόν S m^2 του γκαράζ γίνεται μέγιστο;



Υπόδειξη

i) Να δείξετε ότι $S = 400\,\text{συν}^2\theta + 400\,\text{ημ}\theta\ \text{συν}\theta$

ii) Να εκφράσετε το S στη μορφή $\Sigma = \rho\,\text{ημ}(2\theta + \varphi) + c$

iii) Να βρείτε την τιμή του θ, για την οποία το S παίρνει τη μέγιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

Λύση.

Έστω ΒΓ = x και ΔΕ = y.

Από το τρίγωνο ΕΔΟ έχουμε $x = 20\,\text{συν}\theta$ και $y = 20\,\text{ημ}\theta$

$$S = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΟΑΔΕ}) = x^2 + xy = 400\,\text{συν}^2\theta + 200\,\text{συν}\theta\cdot 200\,\text{ημ}\theta$$
$$= 400\,\text{συν}^2\theta + 400\,\text{ημ}\theta\ \text{συν}\theta$$

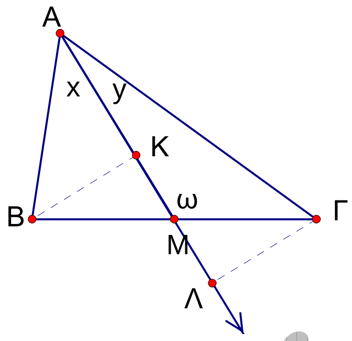
$$S = 400\frac{1+\text{συν}2\theta}{2} + 200\ \text{ημ}2\theta = 200(1 + \text{συν}2\theta) + 200\ \text{ημ}2\theta$$
$$= 200 + 200\,\text{συν}2\theta + 200\ \text{ημ}2\theta = 200 + 200(\text{συν}2\theta + \text{ημ}2\theta)$$
$$= 200 + 200\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{συν}2\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ημ}2\theta\right)$$
$$= 200 + 200\sqrt{2}\left(\text{ημ}\frac{\pi}{4}\text{συν}2\theta + \text{συν}\frac{\pi}{4}\text{ημ}2\theta\right)$$
$$= 200 + 200\sqrt{2}\ \text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right)$$

Το S γίνεται μέγιστο όταν το $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή όταν

$$\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$$

14.

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν $M\hat{A}B = x$, $M\hat{A}\Gamma = y$ και $A\hat{M}\Gamma = \omega$, να αποδείξετε ότι $2\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi x - \sigma\varphi y$



Λύση.

Φέρνουμε ΒΚ και ΓΛ ⊥ ΑΜ.

Τότε τρ.ΜΚΒ = τρ.ΜΛΓ, άρα ΒΚ = ΛΓ

Από το τρίγωνο ΚΑΒ είναι $\sigma\varphi x = \dfrac{AK}{BK}$

Από το τρίγωνο ΛΑΓ είναι $\sigma\varphi y = \dfrac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}$

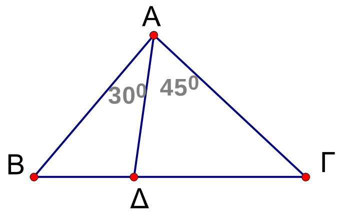
Άρα $\sigma\varphi x - \sigma\varphi y = \dfrac{AK}{BK} - \dfrac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} = -\left(\dfrac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} - \dfrac{AK}{BK}\right)$

$$= -\left(\frac{A\Lambda}{BK} - \frac{AK}{BK}\right) = -\frac{A\Lambda - AK}{BK}$$

$$= -\frac{K\Lambda}{BK} = -2\frac{KM}{BK} = -2\sigma\varphi K\hat{M}B = 2\sigma\varphi\omega$$

15.

Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του διπλανού σχήματος, αν ισχύει $\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \sqrt{3}$.



Λύση.

$\dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Gamma = \sqrt{3}\,\Delta B \qquad$ **(1)**

Νόμος ημιτόνων στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$: $\dfrac{\Delta\Gamma}{\eta\mu 45^0} = \dfrac{A\Delta}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \Delta\Gamma = \dfrac{A\Delta}{\eta\mu\Gamma}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Νόμος ημιτόνων στο τρίγωνο $A\Delta B$: $\dfrac{\Delta B}{\eta\mu 30^0} = \dfrac{A\Delta}{\eta\mu B} \Rightarrow \Delta B = \dfrac{A\Delta}{\eta\mu B}\cdot\dfrac{1}{2}$

$(1) \Rightarrow \dfrac{A\Delta}{\eta\mu\Gamma}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\,\dfrac{A\Delta}{\eta\mu B}\cdot\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\,\eta\mu B = \sqrt{3}\,\eta\mu\Gamma \qquad$ **(2)**

$B + \Gamma = 180^o - 75^o = 105^o \Rightarrow B = 105^o - \Gamma \Rightarrow$

$\eta\mu B = \eta\mu(105^o - \Gamma) \Rightarrow \eta\mu B = \eta\mu 105^o\,\sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu 105^o\,\eta\mu\Gamma \Rightarrow$

$$\eta\mu B = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\sigma\upsilon\nu\Gamma + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\eta\mu\Gamma$$

$(2) \Rightarrow \sqrt{2}\,[\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\sigma\upsilon\nu\Gamma + \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\eta\mu\Gamma] = \sqrt{3}\,\eta\mu\Gamma$

$\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\ (\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu\Gamma + (\sqrt{3}-1)\eta\mu\Gamma\ \right] = \sqrt{3}\,\eta\mu\Gamma$

$(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu\Gamma + (\sqrt{3}-1)\eta\mu\Gamma = 2\sqrt{3}\,\eta\mu\Gamma$

$(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu\Gamma = \ = 2\sqrt{3}\,\eta\mu\Gamma - (\sqrt{3}-1)\eta\mu\Gamma$

$(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu\Gamma = (2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)\eta\mu\Gamma$

$(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu\Gamma = (\sqrt{3}+1)\eta\mu\Gamma$

$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu\Gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = 1 \Rightarrow \Gamma = 45^o$

$B = 105^o - \Gamma = 105^o - 45^o = 60^o$