

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 88 - 89

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = 0$

Λύση

$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi + 0 \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Σημείωση: Οι λύσεις αυτές διαφορετικά γράφονται $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = 0$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Σημείωση: Οι λύσεις αυτές διαφορετικά γράφονται $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.iv)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

Λύση

$$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = -1$

Λύση

$$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.iv)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = -1$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\phi x = 0$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\varepsilon\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi 0 \Leftrightarrow x = k\pi + 0, k \in \mathbb{Z}$$

3.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\varepsilon\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

3.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\phi x = 1$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\sigma\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

3.iv)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\phi x = \sqrt{3}$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\sigma\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sigma\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

4.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\varepsilon\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\sigma\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = -\sigma\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

5.i)

Να λύσετε την εξίσωση $(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

Λύση

$$(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad 2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = 1 \quad \text{ή} \quad 2\eta\mu x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

5.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$

Λύση

$$(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{ή} \quad 1 - \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ 2\eta\mu x = -\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(1)} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1 \quad \text{(2)} \end{array}$$

$$(1) \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2\lambda\pi, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

6.i)

Να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{3} + \epsilon\phi x)(1 - \epsilon\phi x) = 0$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\epsilon\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$(\sqrt{3} + \epsilon\phi x)(1 - \epsilon\phi x) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sqrt{3} + \epsilon\phi x = 0 \quad \text{ή} \quad 1 - \epsilon\phi x = 0 \\ \epsilon\phi x = -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi x = 1 \end{array}$$

$$\epsilon\phi x = -\epsilon\phi \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$$

$$x = \mu\pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \mu\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \mu \in \mathbb{Z}$$

6.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $(2\sigma\upsilon\upsilon\chi + 1)(\epsilon\phi^2\chi - 3)\sigma\phi\chi = 0$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζονται η $\epsilon\phi\chi$ και η $\sigma\phi\chi$, πρέπει

$$\chi \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \chi \neq \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$(2\sigma\upsilon\upsilon\chi + 1)(\epsilon\phi^2\chi - 3)\sigma\phi\chi = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\upsilon\chi + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi^2\chi - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\phi\chi = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\upsilon\chi = -1 \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi^2\chi = 3 \quad \text{ή} \quad \sigma\phi\chi = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\upsilon\chi = -\frac{1}{2} \quad \text{(1)} \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\chi = \sqrt{3} \quad \text{(2)} \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\chi = -\sqrt{3} \quad \text{(3)} \quad \text{ή} \quad \sigma\phi\chi = 0 \quad \text{(4)}$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \sigma\upsilon\upsilon\chi = -\sigma\upsilon\upsilon\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \sigma\upsilon\upsilon\chi = \sigma\upsilon\upsilon(\pi - \frac{\pi}{3}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\upsilon\chi = \sigma\upsilon\upsilon\frac{2\pi}{3}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \chi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \chi = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = -\epsilon\phi\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi(-\frac{\pi}{3}) \quad \Leftrightarrow \chi = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \quad \Leftrightarrow \sigma\phi\chi = \sigma\phi\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \chi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{που απορρίπτονται από τον περιορισμό}$$

7.

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς πίνακες ή επιστημονικό κομπιουτεράκι να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = 0,951$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = -0,809$

iii) $\epsilon\phi x = 28,636$

Λύση

i)

$$\eta\mu x = 0,951 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{2\pi}{5}$$

$$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{5} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{2\pi}{5}$$

$$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{5} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ii)

$$\sigma\upsilon\nu x = -0,809 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{4\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

iii)

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\epsilon\phi x$, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\epsilon\phi x = 28,636 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{22\pi}{45} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{22\pi}{45}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

8.i)

Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu 3x = \sqrt{3}$

Λύση

$$2\eta\mu 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta\mu 3x = \eta\mu \frac{\pi}{3}$$

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

8.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\text{συν}\frac{x}{5} + 1 = 0$

Λύση

$$\text{συν}\frac{x}{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{συν}\frac{x}{5} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\frac{x}{5} = \text{συν}\pi$$

$$\frac{x}{5} = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 10k\pi + 5\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

8.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $3\epsilon\phi\frac{2x}{7} = \sqrt{3}$

Λύση

$$3\epsilon\phi\frac{2x}{7} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\frac{2x}{7} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\epsilon\phi\frac{2x}{7} = \epsilon\phi\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2x}{7} = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$12x = 42k\pi + 7\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{42k\pi + 7\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

9.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Λύση

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

9.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Λύση

$$2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$3x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{36}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

9.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

Λύση

$$\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \epsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-5x = k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$-5x = k\pi + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{60}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

10.i)

Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$.

Λύση

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9, \quad \eta\mu\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad -1$$

$$\bullet \quad \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\omega = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \omega = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\omega = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \omega = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \quad \eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \text{ή} \quad \omega = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

10.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$.

Λύση

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25, \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad -2$$

- $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = -2$ απορρίπτεται, αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

10.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $3\epsilon\varphi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\epsilon\varphi t$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\epsilon\varphi t$, πρέπει $t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$3\epsilon\varphi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\epsilon\varphi t \Leftrightarrow 3\epsilon\varphi^2 - 2\sqrt{3}\epsilon\varphi t - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 12 + 36 = 48, \quad \epsilon\varphi t = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

- $\epsilon\varphi t = \frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} = \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\epsilon\varphi t = \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \epsilon\varphi(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow t = k\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$

11.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4$

Λύση

$$\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2x = 3$$

$$\sigma\upsilon\nu^2x = \frac{3}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$

11.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζονται η $\epsilon\phi x$ και η $\sigma\phi 2x$, πρέπει

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad 2x \neq \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \frac{1}{\epsilon\phi x}$$

$$\sigma\phi 2x = \sigma\phi x$$

$$2x = k\pi + x,$$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{τιμές που απορρίπτονται λόγω των}$$

περιορισμών

12.i)

Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η επόμενη συνάρτηση έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της.

$$f(x) = 3\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Λύση

Η μέγιστη τιμή της f συμβαίνει όταν το $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται μέγιστο δηλαδή 1.

$$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \pi \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \pi < 2\pi$$

$$0 \leq 2k + 1 < 2$$

$$-1 \leq 2k < 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \pi$$

Η ελάχιστη τιμή της f συμβαίνει όταν το $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται ελάχιστο δηλαδή -1.

$$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi < 2\pi$$

$$0 \leq 2k < 2$$

$$0 \leq k < 1 \Leftrightarrow k = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 0$$

12.ii)

Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η επόμενη συνάρτηση έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της.

$$g(x) = 7\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Λύση

Η μέγιστη τιμή της g συμβαίνει όταν το $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται μέγιστο δηλαδή 1.

$$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu 0$$

$$x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi$$

$$0 \leq 2k + \frac{1}{2} < 2$$

$$0 \leq 4k + 1 < 4$$

$$-1 \leq 4k < 3$$

$$-\frac{1}{4} \leq k < \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Η ελάχιστη τιμή της g συμβαίνει όταν το $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται ελάχιστο δηλαδή -1 .

$$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad (4)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < 2\pi$$

$$0 \leq 2k + \frac{3}{2} < 2$$

$$0 \leq 4k + 3 < 4$$

$$-3 \leq 4k < 1$$

$$-\frac{3}{4} \leq k < \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = 0$$

$$(4) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

13.

Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός εποχιακού προϊόντος (σε χιλιάδες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο $S = 75 + 50 \cdot \eta\mu\frac{\pi t}{6}$, όπου t ο χρόνος σε μήνες και

με $t = 1$ να αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.

i) Να βρείτε ποιους μήνες οι πωλήσεις φτάνουν τις 100000 κομμάτια.

ii) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

Λύση

i)

100000, σε χιλιάδες είναι 100

$$S = 100 \Leftrightarrow 75 + 50 \cdot \eta\mu\frac{\pi t}{6} = 100$$

$$50 \cdot \eta\mu\frac{\pi t}{6} = 25$$

$$\eta\mu\frac{\pi t}{6} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\frac{\pi t}{6} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\pi t = 12k\pi + \pi \quad \text{ή} \quad \pi t = 12k\pi + 5\pi$$

$$t = 12k + 1 \quad \text{ή} \quad t = 12k + 5 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq t \leq 12 \Leftrightarrow 0 \leq 12k + 1 \leq 12 \quad \text{ή} \quad 0 \leq 12k + 5 \leq 12$$

$$-1 \leq 12k \leq 11 \quad \text{ή} \quad -5 \leq 12k \leq 7$$

$$-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \quad \text{ή} \quad -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{7}{12}$$

$$k = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow t = 1 \quad \text{ή} \quad t = 5.$$

Το ζητούμενο, λοιπόν, συμβαίνει τους μήνες Ιανουάριο και Μάιο.

ii)

Για να έχουμε μέγιστο S , πρέπει και αρκεί να γίνεται μέγιστο το $\eta\mu\frac{\pi t}{6}$, δηλαδή

$$\eta\mu\frac{\pi t}{6} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi t}{6} = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\pi t = 12k\pi + 3\pi \Leftrightarrow t = 12k + 3 \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq t \leq 12 \Leftrightarrow 0 \leq 12k + 3 \leq 12$$

$$-3 \leq 12k \leq 9$$

$$-1 \leq 4k \leq 3$$

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow t = 3$$

Το ζητούμενο, λοιπόν, συμβαίνει το μήνα Μάρτιο.

Β' Ομάδας

1.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

Λύση

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \eta\mu(-x)$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\frac{\pi}{4} - x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{4} - x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$-2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 0 = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (\text{αδύνατη})$$

$$x = -k\pi - \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζονται η $\varepsilon\varphi 2x$ και η $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$, πρέπει

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{3} + 3x \neq \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}.$$

$$\varepsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} + 3x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-5x = k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$-5x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{30}, k \in \mathbb{Z}$$

2.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x + 1 = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\varepsilon\varphi x$, πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x + 1 = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x - \varepsilon\varphi x + 1 - \eta\mu x = 0$$

$$\varepsilon\varphi x (\eta\mu x - 1) - (\eta\mu x - 1) = 0$$

$$(\eta\mu x - 1)(\varepsilon\varphi x - 1) = 0$$

$$\eta\mu x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x - 1 = 0$$

$$\eta\mu x = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = 1$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{απορρίπτονται} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\epsilon\phi x = 4$

Λύση

Περιορισμός: Πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \epsilon\phi^2 x$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $1 + \epsilon\phi^2 x - 2\epsilon\phi x = 4 \Leftrightarrow$
 $\epsilon\phi^2 x - 2\epsilon\phi x - 3 = 0.$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\epsilon\phi x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = -1 \text{ ή } 3$$

- $\epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
- $\epsilon\phi x = 3 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi \alpha$ όπου α γνωστή γωνία $\Leftrightarrow x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

3.

Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\phi x = 1$ στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζεται η $\epsilon\phi x$ πρέπει $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

$$\epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

$$x \in (3\pi, 4\pi) \Leftrightarrow 3\pi < x < 4\pi$$

$$3\pi < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi$$

$$3 < k + \frac{1}{4} < 4$$

$$12 < 4k + 1 < 16$$

$$12 - 1 < 4k < 16 - 1$$

$$11 < 4k < 15$$

$$\frac{11}{4} < k < \frac{15}{4} \Leftrightarrow k = 3$$

$$(1) \Rightarrow x = 3\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{13\pi}{4}$$

5.

Να λύσετε την εξίσωση: $\epsilon\phi x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$

Λύση

Περιορισμός: Για να ορίζονται η $\epsilon\phi x$ και η $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$, πρέπει

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{3} + x \neq \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}.$$

$$\epsilon\phi x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = k\pi + \frac{\pi}{3} + x, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$-2x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$-2x = \frac{6k\pi - \pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-6k\pi + \pi}{12} \quad (1)$$

$$x \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow 0 \leq x < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{-6k\pi + \pi}{12} < 2\pi$$

$$0 \leq -6k\pi + \pi < 24\pi$$

$$0 \leq -6k + 1 < 24$$

$$-1 \leq -6k < 23$$

$$\frac{1}{6} \geq k > -\frac{23}{6} \Leftrightarrow k = -3 \quad \text{ή} \quad -2 \quad \text{ή} \quad -1 \quad \text{ή} \quad 0$$

$$(1) \Rightarrow x = \frac{-6(-3)\pi + \pi}{12} = \frac{19\pi}{12} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-6(-2)\pi + \pi}{12} = \frac{13\pi}{12} \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{-6(-1)\pi + \pi}{12} = \frac{7\pi}{12} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{12}$$