3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 81 – 83

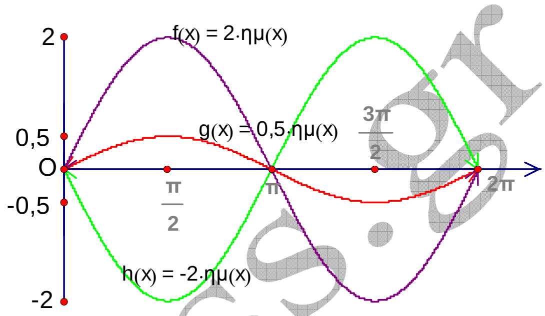
Α΄ Ομάδας

1.i)

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα αξόνων: $f(x) = 2ημx$, $g(x) = 0,5\,.ημx$, $h(x) = -2\,ημx$, $0 \le x \le 2π$

Λύση

x	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
ημx	0	1	0	–1	0
0,5ημx	0	0,5	0	–0,5	0
2ημx	0	2	0	–2	0
–2ημx	0	–2	0	2	0

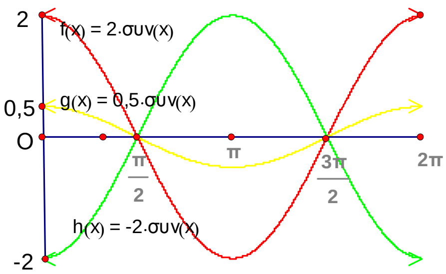


1.ii)

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα αξόνων: $f(x) = 2συνx$, $g(x) = 0,5\,.συνx$, $h(x) = -2\,συνx$, $0 \le x \le 2π$

Λύση

x	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
συνx	1	0	–1	0	1
0,5συνx	0,5	0	–0,5	0	0,5
2συνx	2	0	–2	0	2
–2συνx	–2	0	2	0	–2

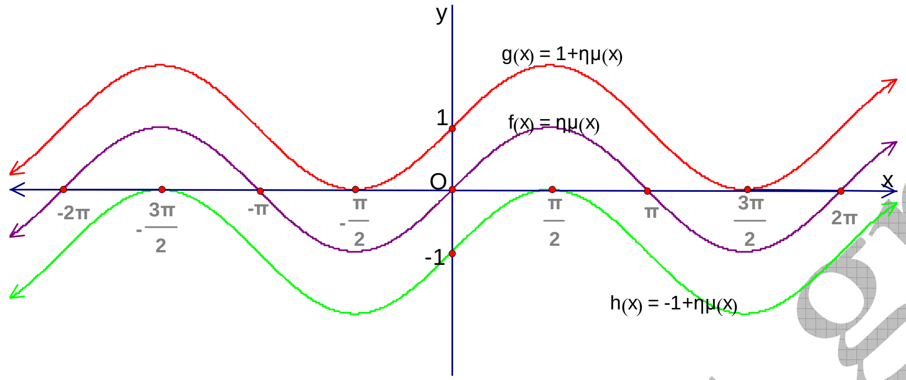


2.

Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = ημx και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

g(x) = 1 + ημx   και   h(x) = –1 + ημx

Λύση



Η γραφική παράσταση της g(x) = = 1 + ημx προκύπτει από κατακόρυφη μεταφορά της γραφικής παράστασης της f(x) = ημx προς τα πάνω κατά 1 μονάδα.

Η γραφική παράσταση της h(x) = = –1 + ημx προκύπτει από κατακόρυφη μεταφορά της γραφικής παράστασης της f(x) = ημx προς τα κάτω κατά 1 μονάδα.

3.

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

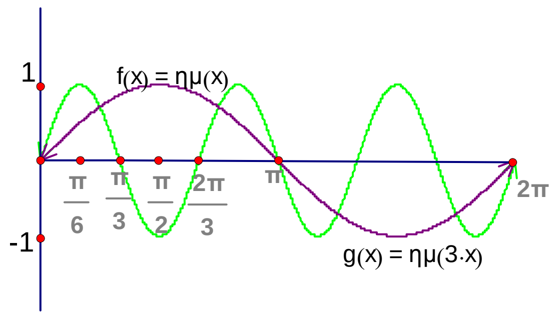
f(x) = ημx   και   g(x) = ημ3x, $0 \le x \le 2\pi$

Λύση

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π
ημ3x	0	1	0	–1	0	0

Είναι $g(x + \frac{2\pi}{3}) = ημ3(x + \frac{2\pi}{3}) =$ ημ(3x + 2π) = ημ3x = g(x).

Άρα η συνάρτηση g(x) = ημ3x είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$



Άλλος τρόπος εύρεσης της περιόδου.

Η συνάρτηση είναι της μορφής ημωx, που έχει περίοδο $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$

4.

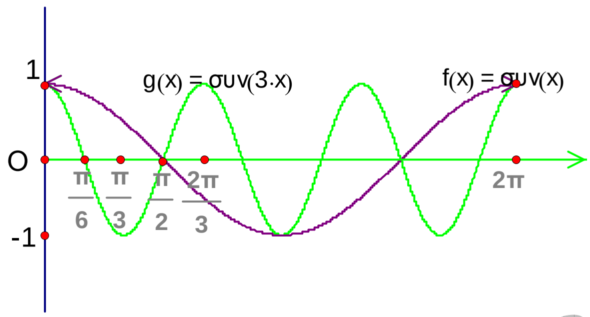
Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
f(x) = συνx και g(x) = συν3x, $0 \le x \le 2\pi$

Λύση

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π
συν3x	1	0	–1	0	1	1

Είναι $g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = συν3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = συν(3x + 2\pi) = συν3x = g(x)$.

Άρα η συνάρτηση g(x) = συν3x είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$



Άλλος τρόπος εύρεσης της περιόδου.
Η συνάρτηση είναι της μορφής συνωx, που έχει περίοδο $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$

5.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2ημ\frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

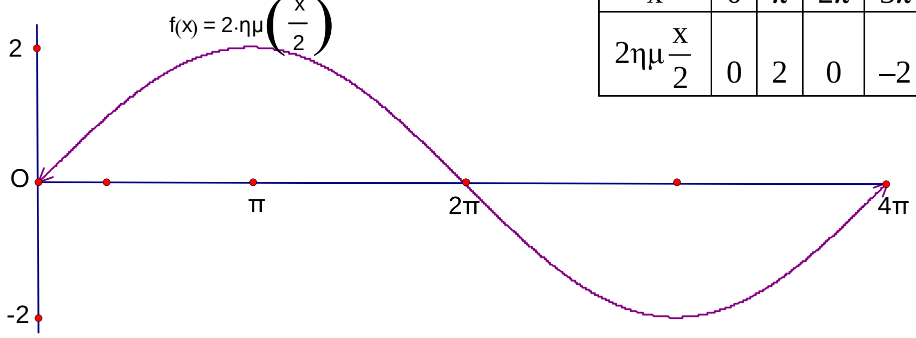
Λύση

$-1 \le ημ\frac{x}{2} \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\,ημ\frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow -2 \le f(x) \le 2$ άρα
η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 και η ελάχιστη –2.

$f(x + 4\pi) = 2ημ\frac{x+4\pi}{2} = 2ημ\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = 2ημ\frac{x}{2} = f(x)$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 4π

x	0	π	2π	3π	4π
$2ημ\frac{x}{2}$	0	2	0	–2	0



6.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2συν\frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση

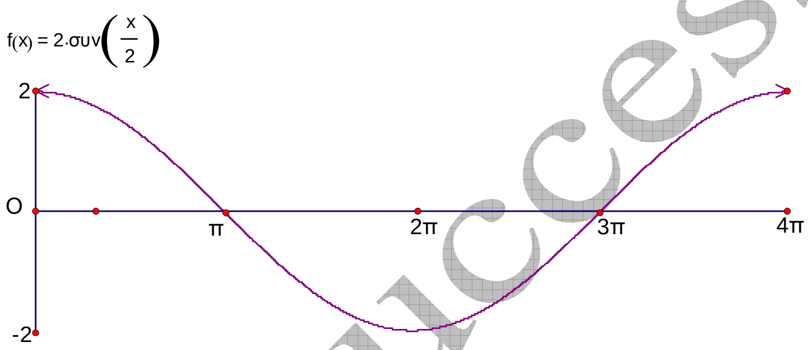
$-1 \le συν\frac{x}{2} \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\,συν\frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow -2 \le f(x) \le 2$ άρα

η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 και η ελάχιστη -2.

$$f(x + 4\pi) = 2συν\frac{x+4\pi}{2} = 2συν\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = 2συν\frac{x}{2} = f(x)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 4π

x	0	π	2π	3π	4π
$2συν\frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2



7.

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

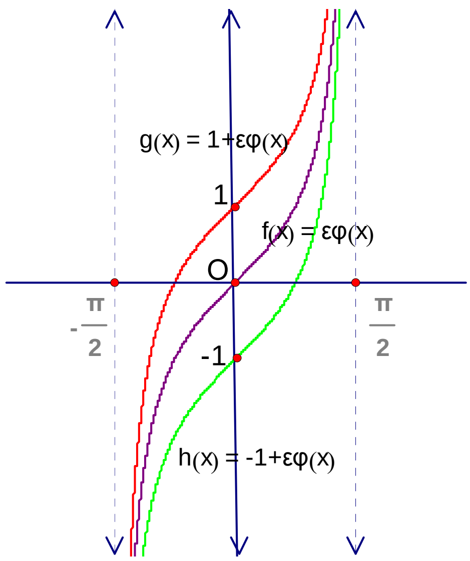
i) $f(x) = εφx$ ii) $g(x) = 1 + εφx$ iii) $h(x) = -1 + εφx$

στο ίδιο σύστημα αξόνων

Λύση

Η γραφική παράσταση της $g(x) = = 1 + εφx$ προκύπτει από κατακόρυφη μεταφορά της γραφικής παράστασης της $f(x) = εφx$ προς τα πάνω κατά 1 μονάδα. Και

Η γραφική παράσταση της $h(x) = = -1 + εφx$ προκύπτει από κατακόρυφη μεταφορά της γραφικής παράστασης της $f(x) = εφx$ προς τα κάτω κατά 1 μονάδα.



8.

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = εφ2x$.

Λύση

Είναι $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = εφ2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$= εφ(2x + \pi)$

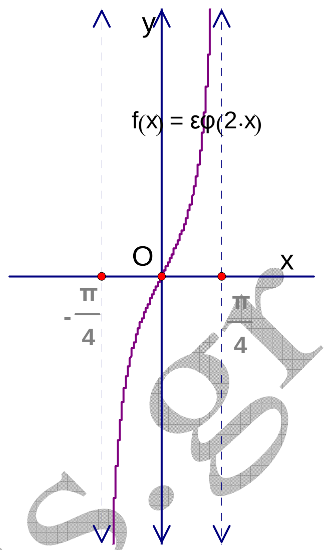
$= εφ2x = f(x)$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

Γράφουμε πίνακα τιμών σε διάστημα πλάτους $\frac{\pi}{2}$,

έστω στο $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
εφ2x		–1	0	1	



9.

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = σφx$

Λύση

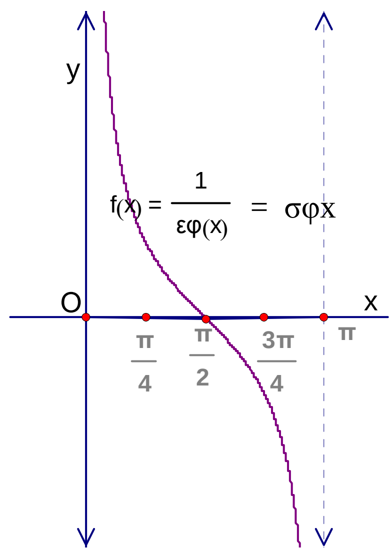
Είναι $f(x + \pi) = σφ(x + \pi) = σφx = f(x)$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο π.

Γράφουμε πίνακα τιμών σε διάστημα πλάτους π,

έστω στο $(0, \pi)$

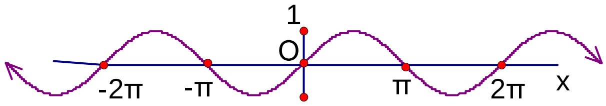
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	π
εφ2x		1	0	–1	



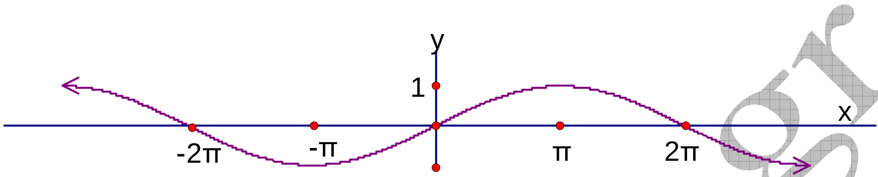
Β΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε τις εξισώσεις των ημιτονοειδών καμπύλων
i)

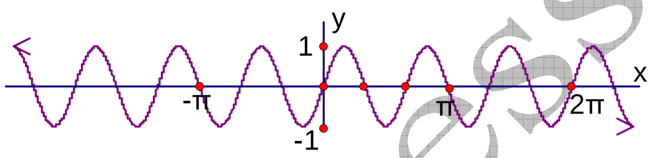
α)



β)

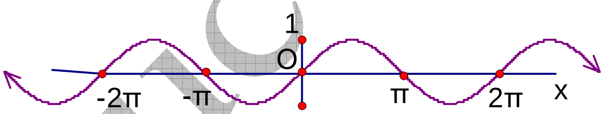


γ)

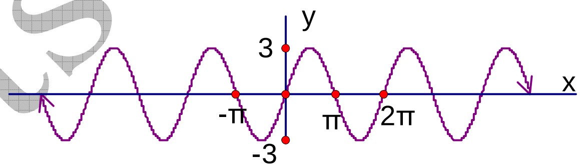


ii)

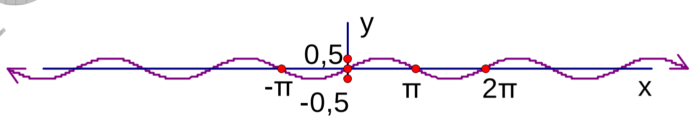
α)



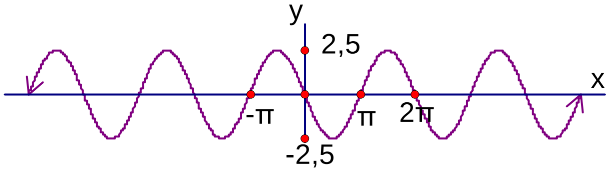
β)



γ)



δ)



Λύση
Αφού είναι ημιτονοειδείς, θα έχουν εξίσωση της μορφής $f(x) = \rho$ ημωx, με $\rho,\omega > 0$

Άρα θα έχουν μέγιστο ρ, ελάχιστο $-\rho$ και περίοδο $\frac{2\pi}{\omega}$

i)

α) ρ = 1 και επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 2π, άρα έχει περίοδο

$2\pi = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 1.$ Άρα η εξίσωσή της είναι $f(x) = 1\,ημ1x = ημx$

β) ρ = 1 και επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 4π, άρα έχει περίοδο

$4\pi = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \dfrac{1}{2}.$ Άρα η εξίσωσή της είναι $f(x) = 1\,ημ\dfrac{1}{2}x = ημ\dfrac{x}{2}$

γ) ρ = 1 και επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 3π, άρα έχει περίοδο

$\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 3.$ Άρα η εξίσωσή της είναι $f(x) = 1\,ημ3x = ημ3x$

ii)

α) Ταυτίζεται με τη iα)

β) ρ = 3 και επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 2π, άρα έχει περίοδο

$2\pi = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 1.$ Άρα η εξίσωσή της είναι $f(x) = 3\,ημ1x = 3ημx$

γ) ρ = 0·5 και επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 2π, άρα έχει περίοδο

$2\pi = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 1.$ Άρα η εξίσωσή της είναι $f(x) = 0{,}5\,ημ1x = 0{,}5ημx$

δ) Έστω g η αντίθετη συνάρτηση της δοσμένης f., δηλαδή $f(x) = -\,g(x)$.
Τότε η g είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα $x'x$ και ημιτονοειδής.
Άρα $g(x) = ρημωx$.
Είναι ρ = 2,5 και επαναλαμβάνεται κατά διαστήματα πλάτους 2π, άρα έχει περίοδο $2\pi = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 1.$
Άρα η εξίσωσή της είναι $g(x) = 2{,}5\,ημ1x = 2{,}5ημx$.
Άρα $f(x) = -\,g(x) = -2{,}5ημx$

2.

Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3 \cdot ημ(\frac{π}{6} t)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

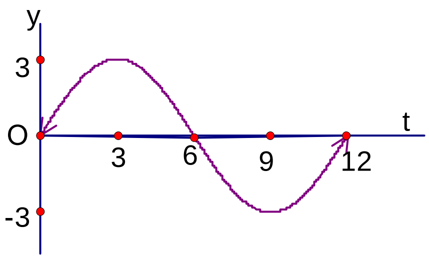
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

Λύση

i)

Η συνάρτηση $y = f(t) = 3 \cdot ημ(\frac{π}{6} t)$ είναι ημιτονοειδής με μέγιστο 3 και ελάχιστο –3. Άρα η υψομετρική διαφορά πλημμυρίδα – άμπωτη είναι 6m.

ii)



t	0	1	3	6	9	12
f(t)	0	$\frac{1}{2}$	3	0	–3	0

3.

Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν το παιχνίδι ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του από το πάτωμα σε μέτρα είναι

$h = 1 + \frac{1}{3}$συν3t, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.

ii) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 2\pi$.

Λύση

i)

$$-1 \le \text{συν}3t \le 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \le \frac{1}{3}\,\text{συν}3t \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{3} \le 1 + \frac{1}{3}\,\text{συν}3t \le 1 + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} \le h(t) \le \frac{4}{3}$$

Το μέγιστο ύψος είναι $\frac{4}{3}$ και το ελάχιστο $\frac{2}{3}$.

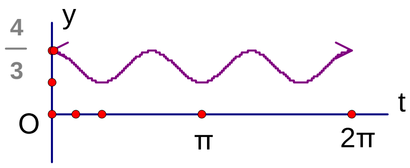
Άρα η διαφορά τους είναι $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ii)

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$

iii)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	π	2π
h(t)	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$



4.

Η απόσταση x του πιστονιού σε μέτρα από το ένα άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται με τη συνάρτηση $x(t) = 0{,}1 + 0{,}1 \cdot ημ3t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

i) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 2\pi$.

Ποιες στιγμές του χρονικού αυτού διαστήματος η απόσταση είναι 0,15m;

Λύση

i)

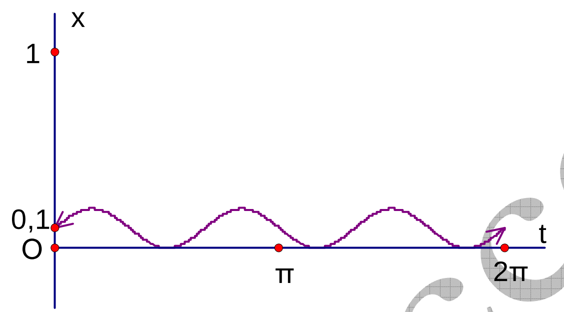
$$-1 \le συν3t \le 1 \quad \Rightarrow \quad -0{,}1 \le 0{,}1\, συν3t \le 0{,}1 \quad \Rightarrow$$

$$0{,}1 - 0{,}1 \le 0{,}1 + 0{,}1\, συν3t \le 0{,}1 + 0{,}1 \quad \Rightarrow$$

$$0 \le x(t) \le 0{,}2$$

Η μέγιστη απόσταση είναι 0,2 και η ελάχιστη 0 και το πλάτος της κίνησης του πιστονιού είναι 0,1

ii)



Στο διάστημα [0,2π] λύνουμε την εξίσωση $x(t) = 0{,}15 \quad \Leftrightarrow$

$$0{,}1 + 0{,}1\,.ημ3t = 0{,}15$$

$$0{,}1\,(1 + ημ3t) = 0{,}15$$

$$1 + ημ3t = 1{,}5$$

$$ημ3t = 0{,}5$$

$$3t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad ή \quad 3t = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$3t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad ή \quad 3t = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $0 \le t \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad 0 \le 3t \le 6\pi \quad \Rightarrow$

$$0 \le 2k\pi + \frac{\pi}{6} \le 6\pi \quad ή \quad 0 \le 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \le 6\pi \quad \Rightarrow$$

$$0 \le 12k\pi + \pi \le 36\pi \quad ή \quad 0 \le 12k\pi + 5\pi \le 36\pi \quad \Rightarrow$$

$$0 \le 12k + 1 \le 36 \quad ή \quad 0 \le 12k + 5 \le 36 \quad \Rightarrow$$

$$-1 \le 12k \le 35 \quad ή \quad -5 \le 12k \le 31 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{12} \le k \le \frac{35}{12} \quad ή \quad -\frac{5}{12} \le k \le \frac{31}{12} \quad \text{και επειδή κ ακέραιος} \quad \Rightarrow$$

(k = 0, 1, 2) ή (k = 0, 1, 2)

Αντικατάσταση του k στην (1) και βρίσκουμε τις στιγμές.