3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ $1^{Ο}$ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 70 – 71

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

i) 1200^o , **ii)** -2850^o

Λύση

i)

Διαιρούμε τον αριθμό 1200 με τον 360 , οπότε 1200 = 3.360 + 120

$$ημ1200^o = ημ(3\cdot 360^o + 120^o) = ημ\,120^o = ημ\,(180^o - 60^o) = ημ\,60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν1200^o = συν\,(3\cdot 360^o + 120^o) = συν\,120^o = συν\,(180^o - 60^o) = -συν\,60^o = -\frac{1}{2}$$

$$εφ\,(1200^o) = \frac{ημ1200^0}{συν1200^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3},$$

$$σφ\,(1200^o) = \frac{1}{εφ1200^0} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ii)

Διαιρούμε τον αριθμό 2850 με τον 360 : οπότε 2850 = 7·360 + 330

$$ημ\,(-2850^o) = -ημ\,2850^o = -ημ(7\cdot 360^o + 330^o) = -ημ\,330^o = -ημ\,(360^o - 30^o) = -ημ\,(-30^o) = -(-ημ\,30^o) = ημ\,30^o = \frac{1}{2}$$

$$συν\,(-2850^o) = συν\,2850^o = συν\,(7\cdot 360^o + 330^o) = συν\,330^o = συν\,(360^o - 30^o) = συν\,(-30^o) = συν\,30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ\,(-2850^o) = \frac{ημ\left(-2850^0\right)}{συν\left(-2850^0\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ\,(-2850^0) = \frac{1}{εφ\left(-2850^0\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

2.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

i) $\frac{187π}{6}$ rad, **ii)** $\frac{21π}{4}$ rad

Λύση

i)

Είναι $\frac{187π}{6} = \frac{187}{12}2π$

Διαιρούμε τον αριθμό 187 με το 12: $187 = 15 \cdot 12 + 7 \Rightarrow \frac{187}{12} = 15 + \frac{7}{12}$

$$\frac{187π}{6} = (15 + \frac{7}{12})\,2π = 15 \cdot 2π + \frac{7π}{6}$$

$$ημ\frac{187π}{6} = ημ\frac{7π}{6} = ημ\,(π + \frac{π}{6}) = -ημ\frac{π}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$συν\frac{187π}{6} = συν\frac{7π}{6} = συν\,(π + \frac{π}{6}) = -συν\frac{π}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ\frac{187π}{6} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ\frac{187π}{6} = \frac{1}{εφ\frac{187π}{6}} = \sqrt{3}$$

ii)

Είναι $\frac{21π}{4} = \frac{21}{8}2π$

Διαιρούμε τον αριθμό 21 με τον 8, οπότε $21 = 2 \cdot 8 + 5 \Rightarrow \frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}$

$$\frac{21π}{4} = (2 + \frac{5}{8}) \cdot 2π = 2 \cdot 2π + \frac{5π}{4}$$

$$ημ\frac{21π}{4} = ημ\frac{5π}{4} = ημ\,(π + \frac{π}{4}) = -ημ\frac{π}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$συν\frac{21π}{4} = συν\frac{5π}{4} = συν\,(π + \frac{π}{4}) = -συν\frac{π}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφ\frac{21π}{4} = εφ\frac{5π}{4} = εφ\,(π + \frac{π}{4}) = εφ\frac{π}{4} = 1 \quad \text{και} \quad σφ\frac{21π}{4} = \frac{1}{εφ\frac{21π}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

3.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι

i) ημΑ = ημ(Β + Γ)

ii) συνΑ + συν (Β + Γ) = 0

iii) $ημ\frac{Α}{2} = συν\frac{Β+Γ}{2}$

iv) $συν\frac{Α}{2} = ημ\frac{Β+Γ}{2}$

Λύση

i)

Οι γωνίες Α, Β + Γ είναι παραπληρωματικές ⇒ ημΑ = ημ(Β + Γ)

ii)

Οι γωνίες Α, Β + Γ είναι παραπληρωματικές ⇒ συνΑ = – συν(Β + Γ)

συνΑ + συν(Β + Γ) = 0

iii)

Οι γωνίες $\frac{Α}{2}$, $\frac{Β+Γ}{2}$ είναι συμπληρωματικές ⇒ $ημ\frac{Α}{2} = συν\frac{Β+Γ}{2}$

iv)

Οι γωνίες $\frac{Α}{2}$, $\frac{Β+Γ}{2}$ είναι συμπληρωματικές ⇒ $συν\frac{Α}{2} = ημ\frac{Β+Γ}{2}$

4.

Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{συν(-α)\cdot συν(180^0+α)}{ημ(-α)\cdot ημ(90^0+α)}$

Λύση

$$\frac{συν(-α)\cdot συν(180^0+α)}{ημ(-α)\cdot ημ(90^0+α)} = \frac{συνα.(-συνα)}{-ημα.\ συνα} = \frac{συνα}{ημα} = σφα$$

5.

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)} = -1$

Λύση

Βρίσκουμε χωριστά

$\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$

$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)$

$= \eta\mu(-x) = -\eta\mu x$

$\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$

$\frac{21}{2}=\frac{2.10+1}{2}=10+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{21\pi}{2}=10\pi+\frac{\pi}{2}$

Άρα $\sigma\varphi(\frac{21\pi}{2}-x) = \sigma\varphi(10\pi + \frac{\pi}{2} - x) = \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}-x) = \varepsilon\varphi x$

Άρα $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{-\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)}{-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\varphi x} = -1$

6.

Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση

$\Sigma = \eta\mu^2(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)+2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

Λύση

Βρίσκουμε χωριστά

$\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

Άρα $\Sigma = \eta\mu^2x+(-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)+2\sigma\upsilon\nu^2x$

$= \eta\mu^2x+(-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu^2x$

$= \eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+2\sigma\upsilon\nu^2x$

$= \eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x = 1$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{\eta\mu 495^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 120^0 + \sigma\upsilon\nu 495^0 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-120^0\right)}{\varepsilon\varphi\left(-120^0\right) + \varepsilon\varphi 495^0}$$

Λύση

$495^o = 360^o + 135^o \Rightarrow \eta\mu 495^o = \eta\mu 135^o = \eta\mu(180^o - 45^o) = \eta\mu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(1)**

και $\sigma\upsilon\nu 495^o = \sigma\upsilon\nu 135^o = \sigma\upsilon\nu(180^o - 45^o) = \sigma\upsilon\nu 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(2)**

και $\varepsilon\varphi 495^o = \varepsilon\varphi 135^o = \varepsilon\varphi(180^o - 45^o) = -\varepsilon\varphi 45^o = -1$ **(3)**

$\sigma\upsilon\nu 120^o = \sigma\upsilon\nu(180^o - 60^o) = -\sigma\upsilon\nu 60^o = -\frac{1}{2}$ **(4)**

$\sigma\upsilon\nu(-120^o) = \sigma\upsilon\nu 120^o = -\frac{1}{2}$ **(5)**

$\varepsilon\varphi(-120^o) = -\varepsilon\varphi 120^o = -\varepsilon\varphi(180^o - 60^o) = \varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$ **(6)**

$$\Pi = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3} + (-1)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3} + (-1)} = 0$$

2.

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu(5\pi+\omega).\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi+\omega).\eta\mu(7\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)} = \eta\mu^2\omega-1$$

Λύση

$$\eta\mu(5\pi+\omega) = \eta\mu(4\pi+\pi+\omega)$$
$$= \eta\mu(\pi+\omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega) = \sigma\upsilon\nu(6\pi+\pi-\omega)$$
$$= \sigma\upsilon\nu(\pi-\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right) = \eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$
$$= \sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$
$$= \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$
$$= \sigma\upsilon\nu\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\right] = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\varphi(5\pi+\omega) = \sigma\varphi(4\pi+\pi+\omega)$$
$$= \sigma\varphi(\pi+\omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\eta\mu(7\pi-\omega) = \eta\mu(8\pi-\pi-\omega)$$
$$= \eta\mu(-\pi-\omega)$$
$$= \eta\mu\left[-(\pi+\omega)\right] = -\eta\mu(\pi+\omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right) = \sigma\varphi\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$
$$= \sigma\varphi\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$
$$= \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$
$$= \sigma\varphi\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\right] = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = -\varepsilon\varphi\omega$$

$$1^o \;\; \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = \frac{-\eta\mu\omega(-\sigma\upsilon\nu\omega)\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\eta\mu\omega}{\sigma\varphi\omega\cdot\eta\mu\omega\cdot\eta\mu\omega(-\varepsilon\varphi\omega)} = -\sigma\upsilon\nu^2\omega = -(1-\eta\mu^2\omega) = \eta\mu^2\omega-1$$

3.

Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$

Λύση

Θέτουμε $\frac{\pi}{3}-x=\omega$ και $\frac{\pi}{6}+x=\varphi$

Τότε $\omega+\varphi=\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{6}+x=\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=\sigma\varphi\varphi \Rightarrow$

$\varepsilon\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi} \Rightarrow$

$\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi\varphi=1$

και η υπόθεση γίνεται $\varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\varphi=5$.

Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ θα έχουμε

$$\Pi = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\varepsilon\varphi^2\omega+\varepsilon\varphi^2\varphi$$

$$=(\varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\varphi)^2-2\varepsilon\varphi\omega.\varepsilon\varphi\varphi$$

$$=5^2-2\cdot1=25-2=23$$

4.

Να αποδείξετε ότι $0<\frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi(\pi+x)}<1$

Λύση

Είναι $\frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi(\pi+x)}=\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}$

$$=\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\varepsilon\varphi x}}$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi x}{\frac{\varepsilon\varphi^2 x+1}{\varepsilon\varphi x}}=\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $0<\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}<1 \Leftrightarrow$

$0<\varepsilon\varphi^2 x<\varepsilon\varphi^2 x+1$ που ισχύει

* Είναι $\varepsilon\varphi x\neq 0$ αφού ορίζεται η $\sigma\varphi(\pi+x)=\varepsilon\varphi x$