3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 63 – 64

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Αν $ημx = \frac{3}{5}$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση

$συνx = \pm\sqrt{1-ημ^2x}$ και επειδή $\frac{π}{2} < x < π$ θα είναι $συνx < 0$, άρα

$$συνx = -\sqrt{1-ημ^2x} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$= -\sqrt{1-\frac{9}{25}}$$
$$= -\sqrt{\frac{25-9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

netsuccess.gr

2.

Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση

$\eta\mu x = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και επειδή $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ θα είναι $\eta\mu x < 0$, άρα

$$\eta\mu x = -\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{1-\frac{4}{9}}$$

$$= -\sqrt{\frac{9-4}{9}} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

netsuccess.gr

3.

Αν $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3π}{2} < x < 2π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση

$$συν^2x = \frac{1}{1+εφ^2x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{3}{9}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Άρα $συνx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Επειδή $\frac{3π}{2} < x < 2π$ θα είναι $συνx > 0$. Άρα $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$ημ^2x = \frac{εφ^2x}{1+εφ^2x} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{3}{9}}{1+\frac{3}{9}} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Άρα $ημx = \pm\frac{1}{2}$

Επειδή $\frac{3π}{2} < x < 2π$ θα είναι $ημx < 0$. Άρα $ημx = -\frac{1}{2}$

$$σφx = \frac{1}{εφx} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

netsuccess.gr

4.

Αν $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση

$$\varepsilon\varphi x = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2.5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow \varepsilon\varphi^2 x = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu^2 x} \Rightarrow$$

$$4\eta\mu^2 x = 5 - 5\eta\mu^2 x \Rightarrow 9\eta\mu^2 x = 5 \Rightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Rightarrow \eta\mu x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ και}$$

επειδή $0 < x < \frac{\pi}{2}$ θα είναι $\eta\mu x > 0$, οπότε $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sigma\upsilon\nu x = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}$ και επειδή $0 < x < \frac{\pi}{2}$ θα είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$, άρα

$$\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1-\eta\mu^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{9-5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

netsuccess.gr

5.

Αν $\sigma\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση

$$\sigma\varphi x = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -2 \quad \Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu x = -2\eta\mu x \quad \textbf{(1)}$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \eta\mu^2 x + (-2\eta\mu x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 1 \quad \Rightarrow$$

$$5\eta\mu^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \eta\mu^2 x = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \eta\mu x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

και επειδή $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ θα είναι $\eta\mu x < 0$, οπότε $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Η (1) $\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\Pi = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4.5}{25}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-4}{5+2\sqrt{5}} = \frac{-4\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$\frac{-4\left(5-2\sqrt{5}\right)}{25-20} = \frac{8\sqrt{5}-20}{5}$$

6.

Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες :

i) Να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$

ii) Να ισχύει συγχρόνως $\eta\nu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$

iii) Να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$

Λύση

i)

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, θα ήταν $0^2 + 0^2 = 1$ δηλαδή $0 = 1$ που είναι άτοπο

ii)

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, θα ήταν $1^2 + 1^2 = 1$ δηλαδή $2 = 1$ που είναι άτοπο

iii)

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, θα ήταν $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$, δηλαδή $\frac{2}{9} = 1$ που είναι άτοπο

netsuccess.gr

7.

Να αποδείξετε ότι, τα σημεία M(x,y) του επιπέδου με $x = 3συνθ$ και $y = 3ημθ$, είναι σημεία κύκλου κέντρου O(0,0) και ακτίνας $ρ = 3$.

Λύση

$$(OM) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3συνθ)^2+(3ημθ)^2} = \sqrt{9συν^2θ+9ημ^2θ} =$$
$$\sqrt{9\left(συν^2θ+ημ^2θ\right)} = \sqrt{9\cdot 1} = 3.$$

Το M, λοιπόν, απέχει από το O απόσταση 3, άρα ανήκει στον κύκλο (O,3)

8.

Αν ισχύει $x = 2συνθ$ και $y = 3ημθ$, να δείξετε ότι $9x^2+4y^2 = 36$.

Λύση

$$9x^2+4y^2 = 9(2συνθ)^2+4(3ημθ)^2 = 9\cdot 4\ συν^2θ + 4\cdot 9\ ημ^2θ =$$
$$36\,(συν^2θ + ημ^2θ) = 36\cdot 1 = 36$$

9.

Αν είναι $x = r\,ημθ\,συνφ$, $y = r\,ημθ\,ημφ$ και $z = r\,συνθ$, να δείξετε ότι $x^2+y^2+z^2 = r^2$

Λύση

$$x^2+y^2+z^2 = (r\,ημθ\,συνφ)^2 + (r\,ημθ\,ημφ)^2 + (r\,συνθ)^2 =$$
$$(r^2\ ημ^2θ\ συν^2φ + r^2\ ημ^2θ\ ημ^2φ) + r^2\,συν^2θ =$$
$$r^2\ ημ^2θ\,(συν^2φ + ημ^2φ) + r^2\,συν^2θ =$$
$$r^2\ ημ^2θ\cdot 1 + r^2\,συν^2θ =$$
$$r^2\,(ημ^2θ + συν^2θ) = r^2\cdot 1 = r^2$$

10.i)

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{ημα}{1+συνα} = \dfrac{1-συνα}{ημα}$

Λύση

$$\frac{ημα}{1+συνα} = \frac{1-συνα}{ημα} \Leftrightarrow ημα.ημα = (1+συνα)(1-συνα)$$
$$ημ^2α = 1-συν^2α$$
$$ημ^2α+συν^2α = 1 \quad \text{που ισχύει}$$

netsuccess.gr

10.ii)

Να αποδείξετε ότι $συν^4α - ημ^4α = 2\ συν^2α - 1$

Λύση

$$συν^4α - ημ^4α = \left(συν^2α\right)^2 - \left(ημ^2α\right)^2 = (συν^2α - ημ^2α)(συν^2α + ημ^2α) =$$

$$(συν^2α - ημ^2α)\cdot 1 = συν^2α - (1 - συν^2α) =$$

$$συν^2α - 1 + συν^2α = 2\ συν^2α - 1$$

11.i)

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{ημθ}{1+συνθ} + \dfrac{1+συνθ}{ημθ} = \dfrac{2}{ημθ}$

Λύση

$$\frac{ημθ}{1+συνθ} + \frac{1+συνθ}{ημθ} = \frac{2}{ημθ} \Leftrightarrow ημ^2θ + (1+συνθ)^2 = 2(1+συνθ)$$

$$ημ^2θ + 1 + 2συνθ + συν^2θ = 2 + 2συνθ$$

$$ημ^2θ + συν^2θ = 1 \quad \text{που ισχύει}$$

11.ii)

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{συνx}{1-ημx} + \dfrac{συνx}{1+ημx} = \dfrac{2}{συνx}$

Λύση

$$\frac{συνx}{1-ημx} + \frac{συνx}{1+ημx} = \frac{2}{συνx} \Leftrightarrow συνx\left(\frac{1}{1-ημx} + \frac{1}{1+ημx}\right) = \frac{2}{συνx}$$

$$συνx \frac{1+ημx+1-ημx}{(1-ημx)(1+ημx)} = \frac{2}{συνx}$$

$$συνx \frac{2}{1-ημ^2x} = \frac{2}{συνx}$$

$$συν^2x = 1 - ημ^2x$$

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \quad \text{που ισχύει}$$

12.i)

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{εφα + σφβ}{εφβ + σφα} = \dfrac{εφα}{εφβ}$

Λύση

$$\frac{εφα + σφβ}{εφβ + σφα} = \frac{εφα + \dfrac{1}{εφβ}}{εφβ + \dfrac{1}{εφα}} = \frac{\dfrac{εφα.εφβ + 1}{εφβ}}{\dfrac{εφα.εφβ + 1}{εφα}} = \frac{εφα}{εφβ}$$

netsuccess.gr

12.ii)

Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha$

Λύση

$$\varepsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\,\eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - 1 = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$1 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha \quad \text{που ισχύει.}$$

13.i)

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x} + \dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{\dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\nu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$$

13.ii)

Να αποδείξετε ότι $(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = \eta\mu x\ \varepsilon\varphi x$

Λύση

$$(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = (1-\sigma\upsilon\nu x)\frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x\ \varepsilon\varphi x$$

netsuccess.gr

13.iii)

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x} = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x} = \frac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x . \sigma\upsilon\nu x}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\eta\mu x . \sigma\upsilon\nu x}} = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

13.iv)

Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$\left(\frac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu x}\,\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Β΄. ΟΜΑΔΑΣ

1.i)

Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του α, την παράσταση $\eta\mu x \ \sigma\upsilon\nu x$

Λύση

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha \quad \Rightarrow \quad (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = \alpha^2 \quad \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = \alpha^2 \quad \Rightarrow$$

$$1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \alpha^2 \quad \Rightarrow$$

$$2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \alpha^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$$

netsuccess.gr

1.ii)

Αν ημx + συνx = α, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του α, την παράσταση

$$\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση

$$\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x} \overset{(i)}{=} \frac{\alpha}{\frac{\alpha^2-1}{2}} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$$ με τον περιορισμό $\alpha\neq -1$ και 1

1.iii)

Αν ημx + συνx = α, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του α, την παράσταση $\varepsilon\varphi x+\ \sigma\varphi x$.

Λύση

$$\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x.\eta\mu x} \overset{(i)}{=} \frac{1}{\frac{\alpha^2-1}{2}} = \frac{2}{\alpha^2-1}$$ με τον περιορισμό $\alpha\neq -1$ και 1

1.iv)

Αν ημx + συνx = α, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του α, την παράσταση $\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x$

Λύση

Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ θα έχουμε

$$\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x = (\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu^2 x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x) \overset{(i)}{=}$$

$$\alpha\left(1-\frac{\alpha^2-1}{2}\right) = \alpha\frac{2-\alpha^2+1}{2} = \alpha\frac{3-\alpha^2}{2}$$

2.i)

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x = 1-2\ \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x$

Λύση

$$\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x + 2\ \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\ \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$= (\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)^2-2\ \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x = 1-2\ \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x$$

2.ii)

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x = 1 - 3\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x$

Λύση

$$\begin{aligned}\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x &= (\eta\mu^2x)^3 + (\sigma\upsilon\nu^2x)^3\\ &= (\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x)(\eta\mu^4x - \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x + \sigma\upsilon\nu^4x)\\ &\overset{(i)}{=} 1\,(1 - 2\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x)\\ &= 1 - 3\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x\end{aligned}$$

2.iii)

Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Pi = 2(\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x) - 3\,(\eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^4x)$ έχει τιμή ανεξάρτητη του x, δηλαδή είναι σταθερή.

Λύση

$$\Pi \overset{(i),(ii)}{=} 2\,(1 - 3\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x) - 3\,(1 - 2\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x) =$$

$$2 - 6\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x - 3 + 6\ \eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x = -1$$

netsuccess.gr

3.

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι $\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = 2\ \varepsilon\varphi x$

Λύση

$$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} = \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}} = \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \left|\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right| = \frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \Rightarrow 1 + \eta\mu x \geq 0 \Rightarrow |1+\eta\mu x| = 1+\eta\mu x$

Επειδή $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x$

(1) $\Rightarrow \sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ **(2)**

Ομοίως $\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ **(3)**

$$(2) - (3) \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\,\varepsilon\varphi x$$

netsuccess.gr

4.

Αν $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}$

Λύση

$$\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x})^2}{(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x})(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x})}$$

$$= \frac{1+\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}+1-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}^2-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}^2}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}}{1+\sigma\upsilon\nu x-(1-\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{2+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1+\sigma\upsilon\nu x-1+\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{\eta\mu^2 x}}{2\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2+2\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2(1+\eta\mu x)}{2\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Για τη δεύτερη ισότητα, αρκεί να δειχθεί ότι $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}$

$$(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$1-\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$1 = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ που ισχύει .

netsuccess.gr