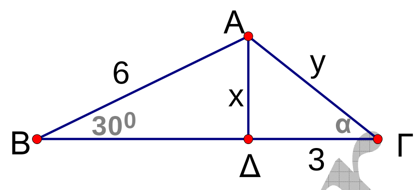
3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 58 – 59

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y και τη γωνία α.



Λύση

Τρ. ΑΔΒ: $\etaμ30^o = \dfrac{x}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{6}$

$2x = 6$

$x = 3$

Το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές $\Rightarrow$ $α = 45^o$.

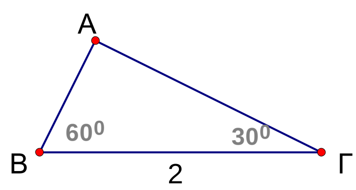
Τρ. ΑΔΓ: $\etaμ45^o = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{y}$

$y\sqrt{2} = 6$

$y = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

2.

Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



Λύση

$Α+Β+Γ = 180^o \Rightarrow Α+60^o+30^o = 180^o$

$Α = 90^o$

$\etaμ30^o = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{ΑΒ}{2} \Rightarrow ΑΒ = 1$

$\etaμ60^0 = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΑΓ = \sqrt{3}$

3.

Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 6$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι

i) $\rho = 1$ cm **ii)** $\rho = 2$ cm **iii)** $\rho = 3$ cm

Λύση

Από τη Γεωμετρία, το μήκος τόξου μ^o είναι $S = \pi\rho\dfrac{\mu}{180}$ όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.

Αλλά $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\omega}{\pi}$, άρα $S = \pi\rho\dfrac{\omega}{\pi}$

$S = \rho\omega$ **(1)**

i) Η (1) για $S = 6$ και $\rho = 1$ γίνεται $6 = 1\cdot\omega \Rightarrow \omega = 6$ rad

ii) Η (1) για $S = 6$ και $\rho = 2$ γίνεται $6 = 2\cdot\omega \Rightarrow \omega = 3$ rad

iii) Η (1) για $S = 6$ και $\rho = 3$ γίνεται $6 = 3\cdot\omega \Rightarrow \omega = 2$ rad

4.

Να εκφράσετε σε rad γωνία

i) 30^o **ii)** 120^o **iii)** 1260^o **iv)** -1485^o

Λύση

Τον τύπο $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180}$, τον λύνουμε σαν εξίσωση με άγνωστο α : $\alpha = \dfrac{\mu}{180}\pi$

i) $\alpha = \dfrac{30}{180}\pi = \dfrac{\pi}{6}$ Άρα $30^o = \dfrac{\pi}{6}$ rad

ii) $\alpha = \dfrac{120}{180}\pi = \dfrac{2\pi}{3}$ Άρα $120^o = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

iii) $\alpha = \dfrac{1260}{180}\pi = 7\pi$ Άρα $1260^o = 7\pi$ rad

iv) $\alpha = \dfrac{-1485}{180}\pi = \dfrac{-33\pi}{4}$ Άρα $-1485^o = \dfrac{-33\pi}{4}$ rad

5.

Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία :

i) $\frac{\pi}{10}$ rad **ii)** $\frac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\frac{91\pi}{3}$ rad **iv)** 100 rad

Λύση

Τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$, τον λύνουμε σαν εξίσωση με άγνωστο μ : $\mu = \alpha\frac{180}{\pi}$

i) $\mu = \frac{\pi}{10}\frac{180}{\pi} = 18$ Άρα $\frac{\pi}{10}$ rad $= 18^o$

ii) $\mu = \frac{5\pi}{6}\frac{180}{\pi} = 150$ Άρα $\frac{5\pi}{6}$ rad $= 150^o$

iii) $\mu = \frac{91\pi}{3}\frac{180}{\pi} = 5460$ Άρα $\frac{91\pi}{3}$ rad $= 5460^o$

iv) $\mu = 100\frac{180}{\pi} = \frac{18000}{\pi}$ Άρα 100 rad $= \frac{18000^o}{\pi}$

6.

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

i) 1830^o **ii)** 2940^o **iii)** 1980^o iv) 3600^o

Λύση

i)

$1830^o = 5.\ 360^o + 30^o$

$\eta\mu 1830^o = \eta\mu 30^o = \frac{1}{2}$ $\sigma\upsilon\nu 1830^o = \sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi 1830^o = \varepsilon\varphi 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\sigma\varphi 1830^o = \sigma\varphi 30^o = \sqrt{3}$

ii)

$2940^o = 8.\ 360^o + 60^o$

$\eta\mu 2940^o = \eta\mu 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sigma\upsilon\nu 2940^o = \sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi 2940^o = \varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$ $\sigma\varphi 2940^o = \sigma\varphi 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

iii)

$1980^o = 5.\ 360^o + 180^o$

$\eta\mu 1980^o = \eta\mu 180^o = 0$ $\sigma\upsilon\nu 1980^o = \sigma\upsilon\nu 180^o = -1$

$\varepsilon\varphi 1980^o = \varepsilon\varphi 180^o = 0$ $\sigma\varphi 2940^o$ δεν ορίζεται

iv)

$3600^o = 10.\ 360^o + 0^o$

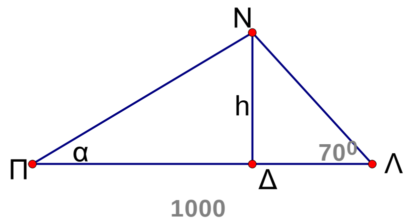
$\eta\mu 3600^o = \eta\mu 0^o = 0$ $\sigma\upsilon\nu 3600^o = \sigma\upsilon\nu 0^o = 1$

$\varepsilon\varphi 3600^o = \varepsilon\varphi 0^o = 0$ $\sigma\varphi 3600^o$ δεν ορίζεται

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Σε μικρά αεροδρόμια υπολογίζουν το ύψος των νεφών με τη βοήθεια μιας ισχυρής λάμπας εντός παραβολικού κατόπτρου, η οποία βρίσκεται σε απόσταση 1000 πόδια (1 πόδι ≃ 0,3 m) από το σημείο του παρατηρητή. Η λάμπα είναι τοποθετημένη υπό σταθερή γωνία και ο παρατηρητής στρέφει το όργανο παρατήρησης στο σημείο ανάκλασης του φωτός από τα νέφη.



i) Να προσδιορίσετε το ύψος h για $\alpha = 30^o$, 45^o και 60^o.

ii) Πόση είναι η γωνία α, αν h = 1000 πόδια;

Λύση

Τρ. ΝΔΛ : $\varepsilon\varphi 70^o = \dfrac{h}{\Delta\Lambda} \Rightarrow \Delta\Lambda = \dfrac{h}{\varepsilon\varphi 70^0}$ **(1)**

Τρ. ΝΔΠ : $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{h}{\Delta\Pi} \Rightarrow \Delta\Pi = \dfrac{h}{\varepsilon\varphi\alpha}$ **(2)**

$$(1) + (2) \Rightarrow 1000 = \frac{h}{\varepsilon\varphi 70^0} + \frac{h}{\varepsilon\varphi\alpha} \Rightarrow 1000 = h\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi 70^0} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}\right)$$

$$1000 = h\,\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi\alpha \,.\, \varepsilon\varphi 70^0}$$

$$h = 1000\,\frac{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 70^0} \qquad \textbf{(3)}$$

i)

$$h = 1000\,\frac{\varepsilon\varphi 30^0 \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi 30^0 + \varepsilon\varphi 70^0} = 1000\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \varepsilon\varphi 70^0} = 1000\,\frac{\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\sqrt{3} + 3\varepsilon\varphi 70^0}$$

$$h = 1000\,\frac{\varepsilon\varphi 45^0 \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi 45^0 + \varepsilon\varphi 70^0} = 1000\,\frac{1 \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{1 + \varepsilon\varphi 70^0} = 1000\,\frac{\varepsilon\varphi 70^0}{1 + \varepsilon\varphi 70^0}$$

$$h = 1000\,\frac{\varepsilon\varphi 60^0 \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi 60^0 + \varepsilon\varphi 70^0} = 1000\,\frac{\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\sqrt{3} + \varepsilon\varphi 70^0}$$

ii)

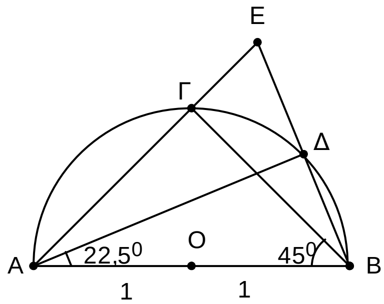
$$(3) \Rightarrow 1000 = 1000\,\frac{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 70^0} \Rightarrow 1 = \frac{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 70^0} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 70^o = \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi 70^o \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi 70^o - \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi 70^o \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\alpha\,(\varepsilon\varphi 70^o - 1) = \varepsilon\varphi 70^o \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\varepsilon\varphi 70^0}{\varepsilon\varphi 70^0 - 1}$$

2.

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:



i) Να δείξετε ότι $(ΑΓ) = (ΒΓ) = 2ημ45^o = \sqrt{2}$

ii) Να εξηγήσετε γιατί είναι $(ΕΒ) = 4\cdot ημ22,5^o$

iii) Να υπολογίσετε το μήκος $(ΓΕ)$

iv) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το τρίγωνο ΒΕΓ, ότι $(ΕΒ) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

v) Να υπολογίσετε το $ημ22,5^o$

vi) Ποιων άλλων γωνιών μπορείτε να υπολογίσετε το ημίτονο και πώς πρέπει να συνεχιστεί η κατασκευή για το σκοπό αυτό;

Λύση

i)

Τρ. ΓΑΒ : $ημ45^o = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ} \Rightarrow ημ45^o = \dfrac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΑΓ = 2ημ45^o$

$$ΑΓ = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $ΒΓ = ΑΓ = \sqrt{2}$

ii)

Η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΑΒΕ, άρα και διάμεσος.

Τρ. ΔΑΒ : $ημ22,5^o = \dfrac{ΔΒ}{ΑΒ} \Rightarrow ημ22,5^o = \dfrac{ΔΒ}{2}$

$$ΔΒ = 2\,ημ22,5^o$$

Άρα $ΕΒ = 2\,ΔΒ = 4\,ημ22,5^o$

iii)

$ΓΕ = ΑΕ – ΑΓ = ΑΒ – \sqrt{2} = 2 – \sqrt{2}$

iv)

$$
\begin{aligned}
ΕΒ^2 = ΕΓ^2 + ΓΒ^2 &= \left(2-\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}^2 \\
&= 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2 \\
&= 8 - 4\sqrt{2} \\
&= 4(2-\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad ΕΒ = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

v)

$$(ii) \Rightarrow \quad ΕΒ = 4ημ22,5^o \Rightarrow 2\sqrt{2-\sqrt{2}} = 4ημ22,5^o \Rightarrow ημ22,5^o = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

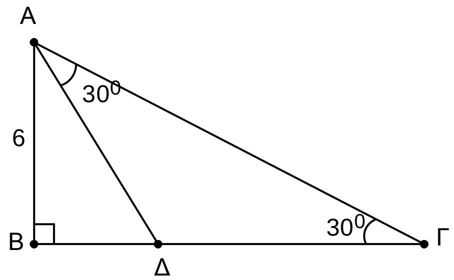
vi)

Διχοτομούμε τη γωνία $Β\hat{Α}Δ$ κ.λ.π.

Έτσι υπολογίζουμε το ημίτονο των γωνιών $\dfrac{22,5^0}{2}$ κ.λ.π.

3.

Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος.



Λύση

Τρ. ΑΒΓ : $\eta\mu 30^o = \frac{6}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma = 12$

Τρ. ΑΒΓ : $\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{B\Gamma}{12} \Rightarrow B\Gamma = 6\sqrt{3}$

$A\hat{\Delta}B = 30^o + 30^o = 60^o$

Τρ. ΑΒΔ : $\varepsilon\varphi 60^o = \frac{6}{B\Delta} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{B\Delta} \Rightarrow B\Delta = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = A\Delta$

Περίμετρος = $A\Delta + \Delta\Gamma + A\Gamma = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12 = 8\sqrt{3} + 12$

Εμβαδόν = $\frac{1}{2}\,\Delta\Gamma . AB = \frac{1}{2} 4\sqrt{3} . 6 = 12\sqrt{3}$

4.

Η πιο αργή κίνηση που μπορεί να επισημάνει το ανθρώπινο μάτι είναι 1mm ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε πόσο μήκος πρέπει να έχει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού για να μπορούμε να επισημάνουμε την κίνηση του άκρου του.

Λύση

Έστω ρ το μήκος του λεπτοδείκτη (ακτίνα κύκλου) σε mm.

Σε 1 h = 3600 sec το άκρο του διαγράφει διάστημα 2πρ,

άρα σε ένα δευτερόλεπτο διαγράφει διάστημα $\frac{2\pi\rho}{3600}$

Έτσι θα έχουμε την εξίσωση $\frac{2\pi\rho}{3600} = 1 \Leftrightarrow 2\pi\rho = 3600 \Leftrightarrow \rho = \frac{3600}{2\pi}$ mm