

3.10 – 3.12

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 57 - 58

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Χαρακτηρίστε (Σ) σωστή ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις

- i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{εξ}$ τριγώνου ABΓ είναι Σ Λ
μεγαλύτερη από την $\hat{\Gamma}$
- ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{εξ}$ τριγώνου ABΓ είναι Σ Λ
μικρότερη από την $\hat{\Gamma}$
- iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° Σ Λ
- iv) Αν $\beta > \gamma$ σε τρίγωνο ABΓ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα Σ Λ
- v) Αν $\beta = \gamma$ σε τρίγωνο ABΓ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα Σ Λ

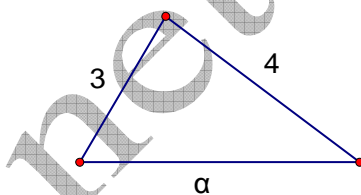
2.

Για το τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος ισχύει

- α. $\alpha = 7$, β. $\alpha = 1$, γ. $1 < \alpha < 7$, δ. $\alpha > 7$, ε. $0 < \alpha < 1$

κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας .
Με βάση την τριγωνική ανισότητα για την πλευρά α έχουμε

$$4 - 3 < \alpha < 4 + 3 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 7$$



3.

Υπάρχει τρίγωνο ABΓ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

Λύση

$$\alpha + \beta = \frac{\gamma}{3} + \frac{3\gamma}{5} = \frac{14\gamma}{15} < \gamma$$

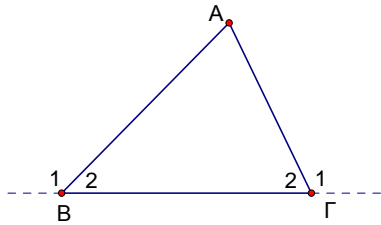
άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με τα παραπάνω στοιχεία

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90^\circ$.

Λύση



$$\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1 \text{ από υπόθεση (1)}$$

$$\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_2 \text{ εξωτερική του τρ. ABG (2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$$

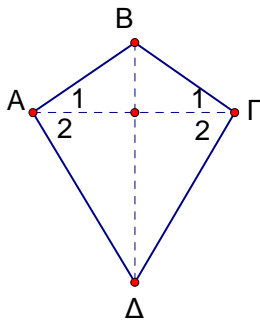
$$2\hat{B}_1 > 180^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{B}_1 > 90^\circ$$

2.

Αν σε κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ ισχύουν $AB = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = \Gamma\Delta$. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;

Λύση



$$AB = B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 \quad (1)$$

$$\text{υπόθεση } \hat{A} = \hat{\Gamma} \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$$

τρ. ΔΑΓ ισοσκελές δηλαδή $\Delta A = \Delta \Gamma$

Επειδή το Β ισαπέχει από τα Α, Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΓ.

Ομοίως για το Δ. Άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

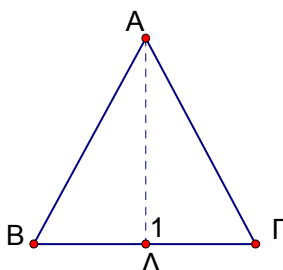
3.

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

i) Τι είδους γωνία είναι η \hat{B} ;

ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

Λύση



$$i) \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} < 180^\circ \Rightarrow \hat{B} < 90^\circ \text{ οξεία.}$$

$$ii) \hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow AB = A\Gamma$$

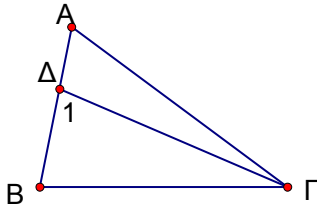
Έστω Δ το μέσο της ΒΓ.

Τότε ΑΔ διάμεσος άρα και ύψος, με το Δ να είναι εσωτερικό σημείο της ΒΓ, αφού είναι μέσο της.

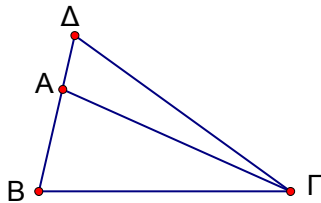
4.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της ημιευθείας Bx που περιέχει το A .
 Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των B και A , ταυτίζεται με το A ή βρίσκεται μετά το A .

Λύση



- Όταν το Δ βρίσκεται μεταξύ των B και A
 $\hat{\Delta}_1 > B\hat{A}\Gamma$ σαν εξωτερική και απέναντι εσωτερική του τριγώνου $\Delta A\Gamma$

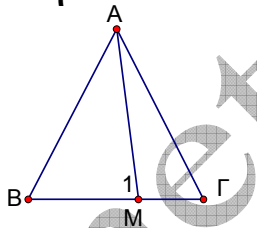


- Όταν το Δ ταυτίζεται με το A .
 Είναι προφανές ότι οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $B\hat{A}\Gamma$ ταυτίζονται, άρα είναι ίσες.
- Όταν το Δ βρίσκεται μετά το A .
 $B\hat{A}\Gamma > \hat{\Delta}_1$ σαν εξωτερική και απέναντι εσωτερική του τριγώνου $\Delta A\Gamma$

5.

Αν M σημείο της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AM < AB$.

Λύση



$$\text{Τρ. } AM\Gamma \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{B}$$

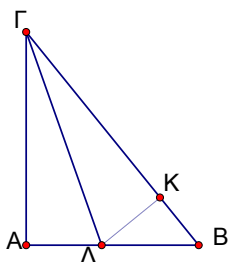
Στο τρίγωνο AMB , απέναντι μεγαλύτερης γωνίας βρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά

$$\text{Άρα } AB > AM$$

6.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta < \Delta B$.

Λύση

Φέρνουμε $\Delta K \perp B\Gamma$

Είναι $\Delta A = \Delta K$ (1) σαν αποστάσεις του σημείου Δ της διχοτόμου από τις πλευρές της γωνίας.

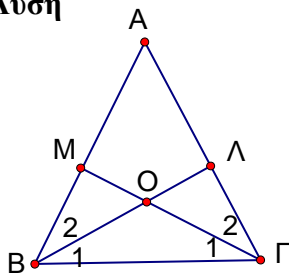
Τρ. $K\Delta B$ ορθογώνιο $\Rightarrow \Delta K < \Delta B$ (2)

Από τις (1), (2) $\Rightarrow \Delta A < \Delta B$

7.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και O σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι BO και GO τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα σημεία Λ και M αντίστοιχα. Αν ισχύει $BO = GO$ και $OL = OM$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Λύση



(Π-Γ-Π) \Rightarrow τρ. $OMB =$ τρ. $OL\Gamma \Rightarrow$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \quad (1)$$

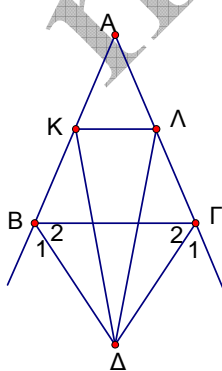
τρ. $OB\Gamma$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 \quad (2)$

(1) + (2) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα τρ. $AB\Gamma$ ισοσκελές.

8.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K, Λ τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι, αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ , τότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Λύση



Συμπεράσματα:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma}, \quad \hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}, \quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$$

$$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow \text{τρ. } \Delta B\Gamma \text{ ισοσκελές με } \Delta B = \Delta \Gamma$$

(Π-Γ-Π) \Rightarrow τρ. $K\Delta B =$ τρ. $K\Delta \Lambda$

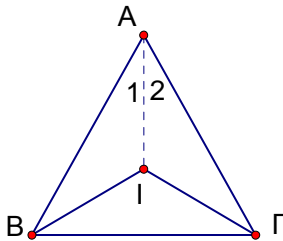
Άρα $\Delta K = \Delta \Lambda$

9.

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών \hat{B} , $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- i) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές
 ii) Η AI είναι διχοτόμος της \hat{A} .

Λύση

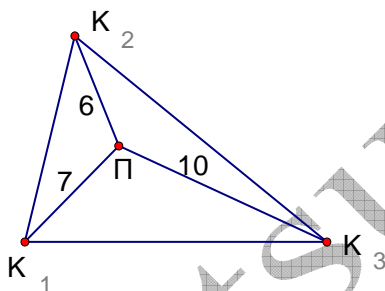


- i) $\frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$ τρ. $IB\Gamma$ ισοσκελές με $IB = I\Gamma$
 ii) (Π-Π-Π) \Rightarrow τρ. $ABI =$ τρ. $A\Gamma I$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 AI διχοτόμος

10.

Οι κωμοπόλεις K_1 , K_2 , K_3 απέχουν από την πόλη Π αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1 K_2 K_3 K_1$ επιστρέφει στην K_1 . Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν;

Λύση



Από εφαρμογή έχουμε

$$K_1K_2 < \Pi K_1 + \Pi K_2 \Rightarrow$$

$$K_1K_2 < 7 + 6 \Rightarrow K_1K_2 < 13$$

$$\text{Ομοίως} \quad K_2K_3 < 16$$

$$K_3K_1 < 17$$

$$\begin{array}{r} \dots\dots\dots+ \\ K_1K_2 + K_2K_3 + K_3K_1 < 46 \Rightarrow \\ 48 < 46 \quad \text{που είναι άτοπο.} \end{array}$$

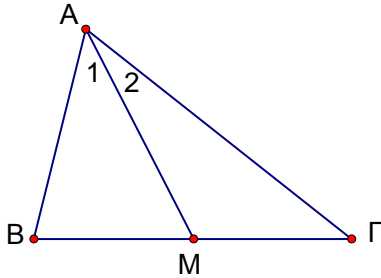
Αποδεικτικές ασκήσεις

1.

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει

όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

Λύση



Έστω AM η διάμεσος μ_α

$$\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AM < MB \xrightarrow{\text{τρ. } \Delta AB} \hat{B} < \hat{A}_1$$

$$\text{και } AM < M\Gamma \xrightarrow{\text{τρ. } \Delta A\Gamma} \hat{\Gamma} < \hat{A}_2$$

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$$

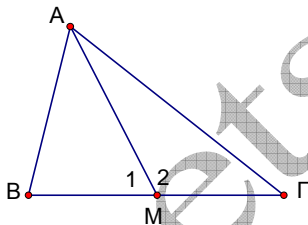
Ομοίως, όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$ και

όταν $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} > \hat{A}$

2.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}M\Gamma > \hat{A}M\hat{B}$

Λύση



Τα τρίγωνα MAB , $M\Gamma$ έχουν δύο πλευρές ίσες (AM κοινή και $MB = M\Gamma$) και τις τρίτες άνισες. Άρα $\hat{M}_2 > \hat{M}_1$

3.

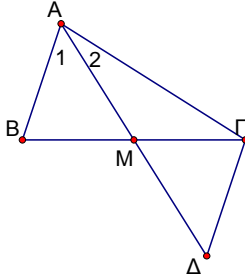
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$

ii) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

Λύση



i) Προεκτείνουμε τη διάμεσο $AM = \mu_\alpha$ κατά τμήμα $M\Delta = AM$.

$$(\Pi - \Gamma - \Pi) \Rightarrow \text{τρ. } M\Gamma\Delta = \text{τρ. } MBA \Rightarrow \Gamma\Delta = AB < A\Gamma \text{ και } \hat{\Delta} = \hat{A}_1 \quad (1)$$

$$\text{Αφού } \Gamma\Delta < A\Gamma, \text{ στο τρ. } \Gamma A\Delta \Rightarrow \hat{\Delta} > \hat{A}_2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{A}_1 > \hat{A}_2$$

ii) Τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\Gamma A\Delta$: $\beta - \gamma < A\Delta < \beta + \gamma \Rightarrow$

$$\beta - \gamma < 2\mu_\alpha < \beta + \gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$$

iii) Από ii) έχουμε $2 \cdot \mu_\alpha < \beta + \gamma \quad (1)$

ομοίως $2 \cdot \mu_\beta < \gamma + \alpha \quad (2)$

και $2 \cdot \mu_\gamma < \alpha + \beta \quad (3)$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) < 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma \Rightarrow$$

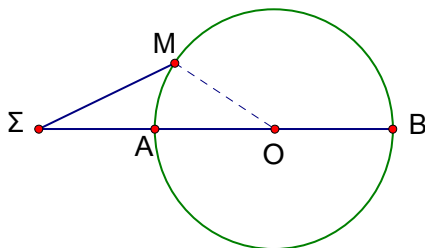
$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$$

4.

Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και σημείο Σ της ημιευθείας OA . Για κάθε σημείο M του κύκλου να αποδειχθεί ότι $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$

Λύση



i) Όταν $M \neq A$ και B

Φέρνουμε την ακτίνα OM .

Τριγωνική ανισότητα στο τρ. ΣOM

$$\Sigma O - OM < \Sigma M < \Sigma O + OM \Rightarrow$$

$$\Sigma O - OA < \Sigma M < \Sigma O + OB \Rightarrow$$

$$\Sigma A < \Sigma M < \Sigma B$$

ii) Όταν $M \equiv A$ τότε $\Sigma A = \Sigma M < \Sigma B$

iii) Όταν $M \equiv B$ τότε $\Sigma A < \Sigma M = \Sigma B$

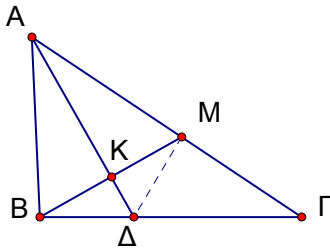
5.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β , να αποδείξετε ότι :

i) $A\Gamma = 2 \cdot AB$

ii) $AB < B\Gamma$

Λύση



Έστω $A\Delta$ η δ_α και BM η μ_β , που τέμνονται στο K .

- i) Το AK είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ABM , άρα ισοσκελές με $AM = AB$
 $A\Gamma = 2 \cdot AM = 2 \cdot AB$

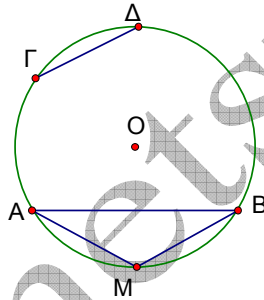
ii) Φέρουμε τη $M\Delta$

Η $AK\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $BM \Rightarrow \Delta M = \Delta B$ **(1)**
 Από το τρ. $M\Delta\Gamma$ έχουμε $M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma \Rightarrow$
 $AB < \Delta B + \Delta\Gamma \Rightarrow$
 $AB < B\Gamma$

6.

Έστω κύκλος (O,R) και δύο τόξα $\widehat{AB}, \widehat{\Gamma\Delta}$. Αν $\widehat{AB} = 2 \widehat{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι $AB < 2 \Gamma\Delta$

Λύση



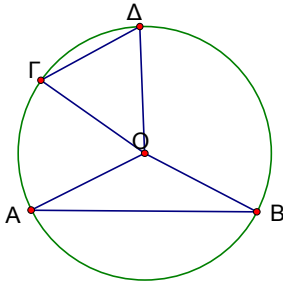
Έστω M το μέσο του τόξου \widehat{AB} . Τότε $\widehat{AM} = \widehat{MB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ άρα και $AM = MB = \Gamma\Delta$

Από το τρίγωνο MAB έχουμε
 $AB < AM + MB \Rightarrow$
 $AB < 2 \Gamma\Delta$

7.

Να αποδείξετε ότι σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα. (Περιορισμός: Τόξα μικρότερα των 180°)

Λύση



Ευθύ.

Υπόθεση $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$

Φέρνουμε τις ακτίνες στα άκρα των τόξων.

Τότε $\hat{O}_1 > \hat{O}_2$.

Τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ έχουν δύο πλευρές ίσες και περιεχόμενη γωνία άνιση, άρα $AB > \Gamma\Delta$

Αντίστροφο

Υπόθεση $AB > \Gamma\Delta$

Με τη σε άτοπο απαγωγή : Έστω ότι είναι $\widehat{AB} \leq \widehat{\Gamma\Delta}$.
Από το ευθύ, θα είναι $AB \leq \Gamma\Delta$ που είναι άτοπο

netsuccess.gr

Σύνθετα Θέματα

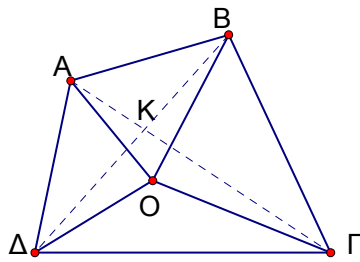
1.

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και O εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι $OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$

ii) Για ποια θέση του O το άθροισμα $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ γίνεται ελάχιστο;

Λύση



i)

$$\text{Τρ. } OAB : OA + OB > AB$$

$$\text{Τρ. } OBG : OB + O\Gamma > B\Gamma$$

$$\text{Τρ. } O\Gamma\Delta : O\Gamma + O\Delta > \Gamma\Delta$$

$$\text{Τρ. } O\Delta A : O\Delta + OA > \Delta A$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$2(OA + OB + O\Gamma + O\Delta) > AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$$

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$$

ii)

Όταν το O δεν είναι σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$, από το τρίγωνο OAG έχουμε $OA + O\Gamma > ΑΓ$

Όταν το O είναι σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$, τότε $OA + O\Gamma = ΑΓ$

Σε κάθε περίπτωση είναι $OA + O\Gamma \geq ΑΓ$ (1)

Ομοίως $OB + O\Delta \geq ΒΔ$ (2)

$$(1) + (2) \Rightarrow OA + OB + O\Gamma + O\Delta \geq ΑΓ + ΒΔ$$

Η ελάχιστη, λοιπόν, τιμή του αθροίσματος $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ είναι $ΑΓ + ΒΔ$ και αυτό συμβαίνει όταν το O συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων.

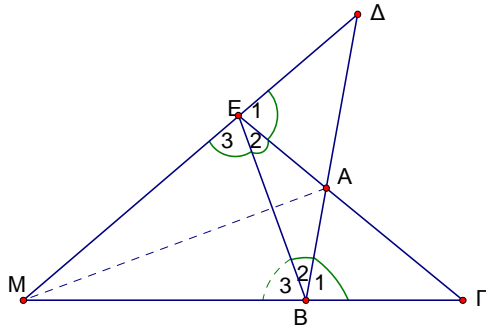
2.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA προς το μέρος του A κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι :

i) Το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές

ii) Η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο A .

Λύση



i)

$(\Pi-\Gamma-\Pi) \Rightarrow \text{τρ. } AE\Delta = \text{τρ. } AB\Gamma$

Άρα $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$

Τρ. ABE ισοσκελές $\Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{B}_2$

Επομένως $\hat{E}_3 = \hat{B}_3$

Άρα τρ. MEB ισοσκελές

ii)

Τα σημεία A, M ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος BE , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετό του, δηλαδή η AM είναι μεσοκάθετος του BE . Λόγω, δε, του ισοσκελούς MBE , θα είναι και διχοτόμος.

3.

Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

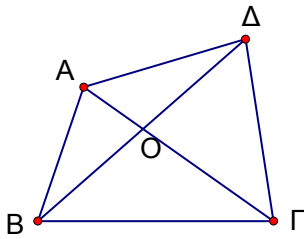
Να αποδείξετε ότι :

i) Κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου

ii) $A\Gamma + B\Delta > AB + \Gamma\Delta$ και $A\Gamma + B\Delta > A\Delta + B\Gamma$

iii) Το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου

Λύση



i)

$$\text{Τρ. } AB\Gamma : A\Gamma < AB + B\Gamma \quad (1)$$

$$\text{Τρ. } A\Delta\Gamma : A\Gamma < A\Delta + \Delta\Gamma \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2 A\Gamma < 2\tau \Rightarrow A\Gamma < \tau \quad (3)$$

$$\text{Ομοίως} \quad B\Delta < \tau \quad (4)$$

ii)

$$\text{Τρ. } OAB : OA + OB > AB \quad (5)$$

$$\text{Τρ. } O\Gamma\Delta : O\Gamma + O\Delta > \Gamma\Delta \quad (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow A\Gamma + B\Delta > AB + \Gamma\Delta \quad (7)$$

$$\text{Ομοίως} \quad A\Gamma + B\Delta > A\Delta + B\Gamma \quad (8)$$

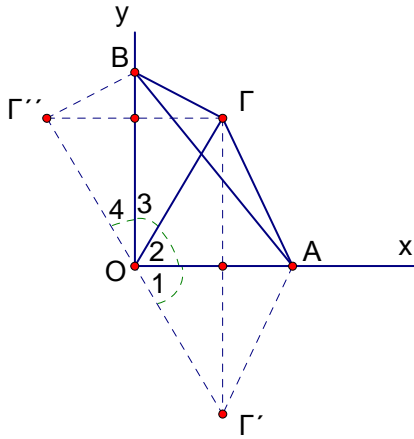
iii)

$$(3) + (4) \Rightarrow A\Gamma + B\Delta < 2\tau \quad \text{και} \quad (7) + (8) \Rightarrow 2(A\Gamma + B\Delta) > 2\tau \Rightarrow A\Gamma + B\Delta > \tau$$

4.

Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Ox , Oy τα σημεία A , B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από $2 \cdot O\Gamma$.

Λύση



Γ' το συμμετρικό του Γ ως προς την Ox
 Γ'' το συμμετρικό του Γ ως προς την Oy

Τότε $O\Gamma' = O\Gamma = O\Gamma''$

$A\Gamma' = A\Gamma$ και $B\Gamma'' = B\Gamma$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

αλλά $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 =$

$\hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_3 =$

$2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 =$

$2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$

άρα Γ', O, Γ'' συνευθειακά

Είναι $\Gamma'\Gamma'' < \Gamma'A + AB + B\Gamma'' \Rightarrow \Gamma'O + O\Gamma'' < A\Gamma + AB + \Gamma B$

$O\Gamma + O\Gamma < 2\tau$

$2 O\Gamma < 2\tau$