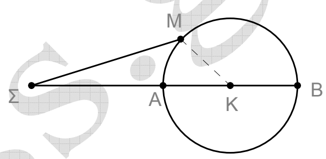
ΜΑΘΗΜΑ 8. Β
2.3 Χρησιμοποιώντας Ευκλείδεια Γεωμετρία
Θεωρία
Ασκήσεις γ. τόπου και μεγιστο – ελάχιστου

Στις ασκήσεις αυτού του μαθήματος χρησιμοποιούμε ανισωτικές σχέσεις από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Θυμίζουμε τις κυριότερες από αυτές.

ΘΕΩΡΙΑ

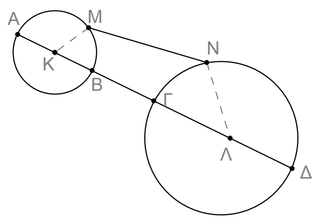
1.

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Κ και σταθερό σημείο Σ του επιπέδου. Η ΣΚ τέμνει τον κύκλο στα Α, Β. Σημείο Μ διατρέχει τον κύκλο. Τότε το ελάχιστο του (ΣΜ) είναι το (ΣΑ) και το μέγιστο είναι το (ΣΒ).
Δηλαδή $(ΣΑ) \leq (ΣΜ) \leq (ΣΒ)$



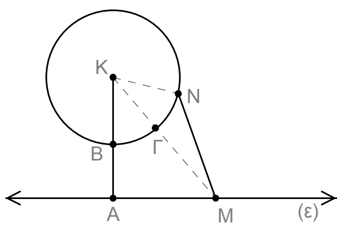
2.

Σημείο Μ διατρέχει κύκλο κέντρου Κ και σημείο Ν διατρέχει κύκλο κέντρου Λ.
Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τους κύκλους στα Α, Β, Γ, Δ.
Τότε το ελάχιστο του (ΜΝ) είναι το (ΒΓ) και το μέγιστο είναι το (ΑΔ).
Δηλαδή $(ΒΓ) \leq (ΜΝ) \leq (ΑΔ)$



3.

Σημείο Μ διατρέχει ευθεία (ε) και σημείο Ν διατρέχει κύκλο κέντρου Κ.
Φέρουμε την $ΚΑ \perp (ε)$, που τέμνει τον κύκλο στο Β.
Τότε το ελάχιστο του (ΜΝ) είναι το (ΑΒ).



Απόδειξη

$$(ΜΝ) \overset{*}{\geq} (ΚΜ) - (ΚΝ) = (ΚΜ) - (ΚΒ) \overset{**}{\geq} (ΚΑ) - (ΚΒ) = (ΒΑ)$$

* Τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΜΝ

** Υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|z-1+2i|\le 1$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-4+6i|$.

Εκφράζουμε τον ζητούμενο $z + 4 + 6i$ συναρτήσει του δοσμένου $z - 1 + 2i$

Λύση αλγεβρική

$z - 4 + 6i = z - 4 + 6i - 1 + 1 + 2i - 2i = (z - 1 + 2i) + (-3 + 4i)$

Η τριγωνική ανισότητα στον $(z - 1 + 2i) + (-3 + 4i)$ από δεξιά δίνει

$|z-4+6i| = |(z - 1 + 2i) + (-3 + 4i)| \le |z-1+2i| + |-3 + 4i| \le 1 + 5 = 6$

Άρα η μέγιστη τιμή είναι 6.

Η τριγωνική ανισότητα στον $(z - 1 + 2i) + (-3 + 4i)$ από αριστερά δίνει

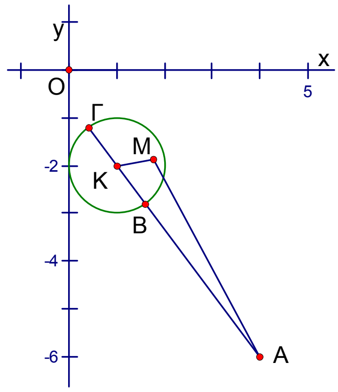
$\big|\,|z-1+2i| - |-3 + 4i|\,\big| \le |(z - 1 + 2i) + (-3 + 4i)| = |z-4+6i| \Rightarrow$

$\big|\,|z-1+2i| - 5\big| \le |z-4+6i| \Rightarrow$

$|1 - 5| \le |z-4+6i| \Rightarrow$

$4 \le |z-4+6i|$ άρα η ελάχιστη τιμή είναι 4

Λύση γεωμετρική



$|z-1+2i|\le 1 \Rightarrow |z-(1-2i)|\le 1 \Rightarrow$

η εικόνα M του z είναι σημείο του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 1.

Η ποσότητα $|z-4+6i| = |z-(4-6i)|$

εκφράζει την απόσταση MA, όπου $A(4, -6)$

Φέρνουμε την AK, η οποία τέμνει τον κύκλο στα B, Γ.

Στο τρίγωνο KMA έχουμε

$(MA) \le (KA) + (KM) \le (KA) + (K\Gamma) = (A\Gamma)$

Άρα η μέγιστη τιμή του (MA) είναι

$(A\Gamma) = (AK) + 1 = \sqrt{(1-4)^2+(-2+6)^2} + 1 = \sqrt{9+16} + 1 = 5 + 1 = 6$

Στο τρίγωνο KMA έχουμε

$(KA) - (KM) \le (MA) \Rightarrow (KA) - (KB) \le (MA) \Rightarrow (AB) \le (MA)$

Άρα η ελάχιστη τιμή του (MA) είναι

$(AB) = (AK) - 1 = 5 - 1 = 4$

2.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|z-2-4i|\le 1$. Να αποδείξετε ότι $4\le|z+1|\le 6$

Υπόδειξη

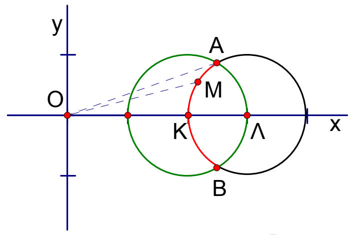
Ακολούθησε την άσκηση 1.

3.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|z-2|\le 1$ και $|z-3|=1$. Να αποδείξετε ότι

$$2\le |z| \le\sqrt{7}$$

Λύση γεωμετρική



$|z-2|\le 1 \Rightarrow |z-(2+0i)|\le 1 \Rightarrow$

η εικόνα Μ του z είναι σημείο του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα 1.

$|z-3|=1 \Rightarrow |z-(3+0i)|=1 \Rightarrow$

η εικόνα Μ του z είναι σημείο του κύκλου που έχει κέντρο Λ(3, 0) και ακτίνα 1.

Άρα το Μ είναι σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AKB}$, όπου Α, Β τα σημεία τομής των δύο κύκλων.

Το ελάχιστο του $|z|$ δηλαδή του (ΜΟ) συμβαίνει όταν $M\equiv K$

Και επειδή (ΟΚ) = 2, θα είναι $2\le |z|$

Το μέγιστο του $|z|$ δηλαδή του (ΜΟ) συμβαίνει όταν $M\equiv A$ ή Β

Δηλαδή $|z| \le (OA)$ **(1)**

Η τετμημένη του Α είναι $\frac{5}{2}$ αφού ΑΒ μεσοκάθετος του ΚΛ.

$$(KA)=1 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}-2\right)^2+\left(y_A-0\right)^2=1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}+y_A^2=1 \Rightarrow y_A^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y_A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(OA)^2=x_A^2+y_A^2=\frac{25}{4}+\frac{3}{4}=\frac{28}{4}=7 \Rightarrow (OA)=\sqrt{7}$$

$$(1) \Rightarrow |z|\le\sqrt{7}$$

Λύση αλγεβρική

$$|z-2|\le 1 \Leftrightarrow |z-2|^2\le 1 \Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2)\le 1$$

$$z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4\le 1$$

$$|z|^2-2(z+\bar{z})\le -3 \quad \textbf{(1)}$$

$$|z-3|=1 \Leftrightarrow |z-3|^2=1 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)=1$$

$$z\bar{z}-3z-3\bar{z}+9=1$$

$$|z|^2-3(z+\bar{z})=-8$$

$$-3(z+\bar{z})=-|z|^2-8$$

$$z+\bar{z}=\frac{|z|^2+8}{3} \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} |z|^2-2\frac{|z|^2+8}{3}\le -3 \Rightarrow 3|z|^2-2|z|^2-16\le -9$$

$$|z|^2\le 7$$

$$|z|\le\sqrt{7}$$

Τριγωνική ανισότητα $\left||z|-3\right| \le |z-3| \Rightarrow \left||z|-3\right| \le 1$ **(3)**

Αλλά $3-|z| \le \left||z|-3\right|$ **(4)** (ιδιότητα απολύτων τιμών στους πραγματικούς)

Από (3) και (4) $\Rightarrow 3-|z| \le \left||z|-3\right| \le 1 \Rightarrow 3-|z| \le 1$

$2 \le |z|$

4.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $\left|\dfrac{z}{z-3}\right| = \dfrac{1}{2}$. Στη συνέχεια να βρείτε εκείνον τον z, ο οποίος έχει το ποιο μικρό μέτρο και εκείνον ο οποίος έχει το ποιο μεγάλο.

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: $z \neq 3$

$$\left|\frac{z}{z-3}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z-3|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|z| = |z-3|$$

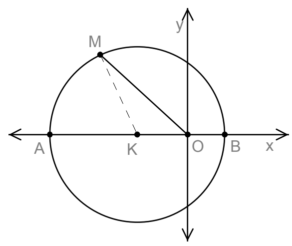
$$4|z|^2 = |z-3|^2$$
$$4z\bar{z} = (z-3)\overline{(z-3)}$$
$$4z\bar{z} = (z-3)(\bar{z}-3)$$
$$4z\bar{z} = z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9$$
$$3z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} = 9$$
$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 3$$

Θέτουμε $z = x + yi$, οπότε $(x+yi)(x-yi) + x + yi + x - yi = 3$

$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ κύκλος με κέντρο $K(-1,\ 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Επειδή $z \neq 3 + 0i$, πρέπει το σημείο $\Lambda(3,\ 0)$ να μην είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, δηλαδή να μην ανήκει στον κύκλο.
Αυτό πράγματι συμβαίνει, αφού οι συντεταγμένες του Λ δεν επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.

Σε σύστημα αξόνων (Oxy), γράφουμε τον κύκλο (K, 2), ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία A(–3, 0), B(1, 0).
Έστω M η εικόνα του τυχαίου z.
Τότε $|z| = (OM)$



Γνωρίζουμε ότι

$(OB) \le (OM) \le (OA) \Leftrightarrow 1 \le |z| \le 3$ Θεωρία 1

Επομένως, η ελάχιστη τιμή του $|z|$ συμβαίνει όταν η εικόνα του z συμπίπτει με το B και η μέγιστη όταν συμπίπτει με το A.
Δηλαδή όταν $z = (1,\ 0)$ και $z = (-3,\ 0)$ αντίστοιχα.

5.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $\left|\sqrt{2}z-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right| = 2$

ii) Από τους παραπάνω μιγαδικούς να βρείτε τους z εκείνους για τους οποίους συμβαίνει $|z| = \max$, $|z| = \min$ αντίστοιχα.

iii) Να υπολογίσετε τα $|z|_{max}$, $|z|_{min}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\left|\sqrt{2}z-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right| = 2 \iff \left|\sqrt{2}(z-2-2i)\right| = 2$$

$$\sqrt{2}\,|z-2-2i| = 2$$

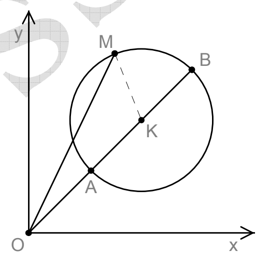
$$|z-(2+2i)| = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$|z-(2+2i)| = \sqrt{2}$$ κύκλος με κέντρο K(2, 2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

ii)

Ως γνωστόν, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο K(2, 2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ είναι

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$



Σε σύστημα αξόνων (Oxy), γράφουμε τον κύκλο, ο οποίος τέμνει την ευθεία OK : $y = x$ στα σημεία A, B.
Έστω M η εικόνα του τυχαίου z.
Τότε $|z| = (OM)$

Η λύση του συστήματος $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2 = 2\\ y = x\end{cases}$ δίνει τις συντεταγμένες των σημείων A και B. Συγκεκριμένα A(1, 1) και B(3, 3).

Γνωρίζουμε ότι $(OA) \le (OM) \le (OB) \iff$

$(OA) \le |z| \le (OB)$

Θεωρία 1

Συνεπώς, ο μιγαδικός που έχει εικόνα το σημείο A έχει το ποιο μικρό μέτρο, ενώ ο μιγαδικός που έχει εικόνα το σημείο B έχει το ποιο μεγάλο .
Όμως ,το A είναι εικόνα του μιγαδικού $z = 1 + i$ ενώ το B είναι εικόνα του $z = 3 + 3i$
Επομένως ο αριθμός με το μικρότερο μέτρο είναι ο $z = 1 + i$, ενώ με το μεγαλύτερο είναι ο $z = 3 + 3i$.

iii)

Από το (ii) έχουμε ότι $|z|_{min} = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

και $|z|_{max} = |3+3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

Σχόλιο

Αν θέλαμε να βρούμε μόνο τις τιμές $|z|_{max}$, $|z|_{min}$, τότε χωρίς να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένε των A και B μπορούμε να πούμε ότι

$|z|_{min} = (OK) - \rho = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ και

$|z|_{max} = (OK) + \rho = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

6.

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ο αριθμός $w = \dfrac{2i - z}{z - 5}$ είναι πραγματικός

ii) Από τους παραπάνω μιγαδικούς z, να βρείτε εκείνον που έχει το ποιο μικρό μέτρο και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Περιορισμός: $z \neq 5$

Έστω $z = x + yi$ τότε

$$w = \frac{2i - (x+yi)}{x + yi - 5} = \frac{(2i - x - yi)(x - 5 - yi)}{(x + yi - 5)(x - 5 - yi)} = \frac{-x^2 - y^2 + 5x + 2y}{(x-5)^2 + y^2} + \frac{2x + 5y - 10}{(x-5)^2 + y^2} i$$

$w \in \mathbb{R} \iff 2x + 5y - 10 = 0 \iff y = -\dfrac{2}{5}x + 2$ που είναι ευθεία (ε).

Επειδή $z \neq 5 \iff (x\,,\,y) \neq (5,\ 0)$, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε) εκτός από το σημείο της $A(5,\ 0)$.

ii)

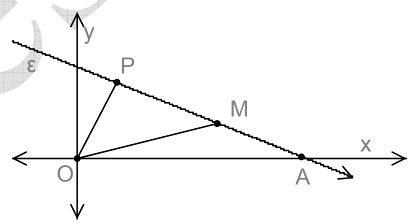
Έστω M η εικόνα του τυχαίου z.

Τότε $|z| = (OM)$.

Φέρουμε $OP \perp ε$.

Γνωρίζουμε ότι $(OP) \leq (OM)$

Επομένως, ο z με το ποιο μικρό μέτρο έχει εικόνα το P.



Βρίσκουμε την εξίσωση της OP.

$OP \perp (ε) \iff λ_{OP} \cdot λ_ε = -1 \iff λ_{OP} \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right) = -1 \iff λ_{OP} = \dfrac{5}{2}$

Επειδή η ευθεία OP διέρχεται από το σημείο $O(0,\ 0)$, η εξίσωση της είναι

$y - 0 = \dfrac{5}{2}(x - 0) \iff y = \dfrac{5}{2}x$

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{5}x + 2 \\ y = \dfrac{5}{2}x \end{cases}$ βρίσκουμε $x = \dfrac{20}{29}$ και $y = \dfrac{50}{29}$

Άρα $P\left(\dfrac{20}{29},\ \dfrac{50}{29}\right)$

Συνεπώς, ο z με το ποιο μικρό μέτρο είναι ο $z = \dfrac{20}{29} + \dfrac{50}{29}i$

Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι $|z|_{min} = \left|\dfrac{20}{29} + \dfrac{50}{29}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \left(\dfrac{50}{29}\right)^2} = \dfrac{10}{29}\sqrt{29}$

7.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w, για τους οποίους ισχύει $|w+2-2i|=1$

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z-11|=3|z-3|$

iii) Για τους παραπάνω z, w, να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $|w-z|$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$|w+2-2i|=1 \Leftrightarrow |w-(-2+2i)|=1$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-2,\ 2)$ και ακτίνα $\rho=1$

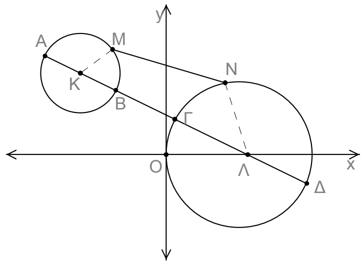
ii)

Έστω $z=x+yi$ τότε

$$|z-11|=3|z-3| \Leftrightarrow |(x-11)+yi|=3|(x-3)+yi|$$
$$\sqrt{(x-11)^2+y^2}=3\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$
$$(x-11)^2+y^2=9(x-3)^2+9y^2$$
$$x^2+y^2-4x-5=0$$
$$x^2-4x+4+y^2-9=0$$
$$(x-2)^2+y^2=9$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $\Lambda(2,\ 0)$ και ακτίνα $R=3$

iii)



Σε σύστημα αξόνων (Oxy), γράφουμε τους κύκλους Κ, Λ και τη διάκεντρό τους ΑΒΓΔ.
Έστω Μ, Ν οι εικόνες των τυχαίων w, z αντίστοιχα.
Τότε $|w-z|=(MN)$
Γνωρίζουμε ότι $(B\Gamma)\le(MN)\le A\Delta$ $\boxed{\text{Θεωρία 2}}$

Άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του (MN) είναι το $(B\Gamma)=(K\Lambda)-\rho-R$
$$=\sqrt{20}-1-3$$
$$=\sqrt{20}-4$$

$*\quad (K\Lambda)=\sqrt{\left(2-(-2)\right)^2+\left(0-2\right)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

Και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του (MN) είναι το $(A\Delta)=(K\Lambda)+\rho+R$
$$=\sqrt{20}+1+3$$
$$=\sqrt{20}+4$$

Σχόλιο

Αν θέλαμε να προσδιορίσουμε τους μιγαδικούς για τους οποίους προκύπτουν οι παραπάνω τιμές βρίσκουμε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ.

Εύκολα προκύπτει ότι η ευθεία ΚΛ έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x+1$

ο κύκλος (K,ρ) έχει εξίσωση την $(x+2)^2+(y-2)^2=1$
και ο κύκλος (Λ, R) την $(x-2)^2+y^2=4$.

Λύνοντας τα συστήματα των εξισώσεων της ευθείας και κάθε ενός κύκλου βρίσκουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και επομένως τους ζητούμενους μιγαδικούς αριθμούς.

8.

Έστω ο μιγαδικός $z=\lambda+(\lambda-1)i$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός w, για τον οποίο ισχύει $|w+2-2i|=1$.

i) Για τις διάφορες τιμές του λ, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, καθώς επίσης και τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-w|$ και τους αριθμούς z και w για τους οποίους προκύπτει αυτή η τιμή.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του τυχαίου z.

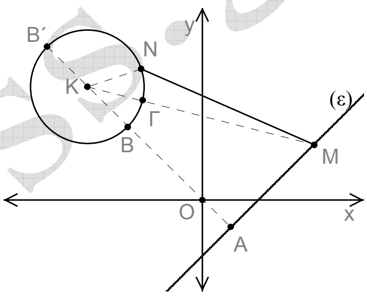
$z=\lambda+(\lambda-1)i \Leftrightarrow x=\lambda$ και $y=\lambda-1 \Leftrightarrow y=x-1$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος του z είναι η ευθεία $(\varepsilon):\ y=x-1$

$|w+2-2i|=1 \Leftrightarrow |w-(-2+2i)|=1$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-2,\ 2)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ii)



Σε σύστημα αξόνων (Oxy), γράφουμε τον κύκλο K και την ευθεία (ε).

Έστω M, N οι εικόνες των τυχαίων z, w αντίστοιχα.

Τότε $|z-w|=(MN)$

Φέρουμε $KA\perp(\varepsilon)$ που τέμνει τον κύκλο στα B, B΄.

Γνωρίζουμε ότι $(AB)\le(MN)$

Θεωρία 3

Άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του (MN) είναι το $(BA)=(KA)-(KB)=d(K,\varepsilon)-\rho$

$$=\frac{5}{\sqrt{2}}-1$$

Συνεπώς $|z-w|_{min}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}-1$

Η εξίσωση της ευθείας KA είναι $y=-x$ $\quad(\perp(\varepsilon)$ από το $K)$

Η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x \end{cases}$ μας δίνει $A\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

Οπότε, ο z που έχει εικόνα το A είναι $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

Η λύση του συστήματος $\begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=1 \\ y=-x \end{cases}$ μας δίνει $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2,\ 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Οπότε, ο w που έχει εικόνα το B είναι $w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2+\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

Παρατήρηση

Θα μπορούσαμε να βρούμε την απόσταση AB αφού προσδιορίσουμε πρώτα τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

9.

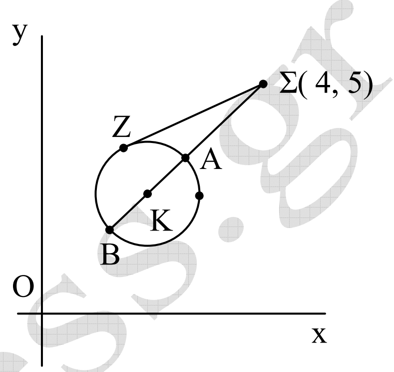
Αν $\left| z-1-i \right| \le 2$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\Pi = \left| z-4-5i \right|$

Προτεινόμενη λύση

$\left| z-1-i \right| \le 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \left| z-(1+i) \right| \le 2$. Άρα η εικόνα Ζ του z ανήκει στον κυκλικό δίσκο κέντρου Κ(1, 1) και ακτίνας ρ = 2.

$\Pi = \left| z-4-5i \right| \;\; \Leftrightarrow \;\; \Pi = \left| z-(4+5i) \right|$. Άρα η παράσταση (Π) εκφράζει την απόσταση (ΣΖ) της εικόνας Ζ του z από το σημείο Σ(4, 5).

Σε σύστημα αξόνων (Oxy), τοποθετούμε τα σημεία Σ, Ζ και τον κύκλο Κ. Φέρουμε το ΣΖ και τη ΣΚ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β.



Γνωρίζουμε ότι

(ΣΑ) ≤ (ΣΖ) ≤ (ΣΒ)

Θεωρία 1

Επομένως, η μικρότερη δυνατή τιμή της παράστασης (Π) είναι (ΣΑ) και η μεγαλύτερη είναι (ΣΒ)

Είναι $(\Sigma K) = \sqrt{(1-4)^2+(1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$(\Sigma A) = (\Sigma K) - \rho = 5 - 2 = 3$

$(\Sigma B) = (\Sigma K) + \rho = 5 + 2 = 7$

Τελικά είναι $\Pi_{min} = 3$ και $\Pi_{max} = 7$

* Για να βρούμε τους z για τους οποίους συμβαίνει το ελάχιστο – μέγιστο, βρίσκουμε την εξίσωση του κύκλου και την εξίσωση της ευθείας ΣΚ και λύνουμε το σύστημά τους.

10.

Αν $\left| 2z-6+2i \right| = 4$, δείξτε ότι $\sqrt{10} - 2 \le |z| \le \sqrt{10} + 2$

Προτεινόμενη λύση

$|2z-6+2i| = 4 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2|z-3+i| = 4$

$|z-3+i| = 2$

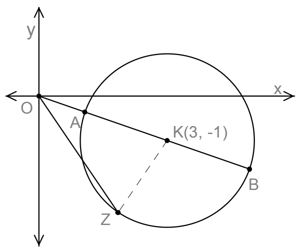
$\left| z-(3-i) \right| = 2$

Οπότε, οι εικόνες του z διατρέχουν τον κύκλο με κέντρο Κ(3, –1) και ακτίνα ρ = 2.

Σε σύστημα αξόνων (Oxy), γράφουμε τον κύκλο (Κ, 2), ο οποίος τέμνει την ημιευθεία ΟΚ στα σημεία Α, Β.

Έστω Ζ η εικόνα του τυχαίου z.

Τότε $|z| = (OZ)$ και $(KZ) = \rho = 2$.



$(OA) \le (OZ) \le (OB) \;\; \Leftrightarrow \;\; (OA) \le |z| \le (OB)$ **(1)**

Επομένως, η ελάχιστη τιμή του $|z|$ συμβαίνει όταν η εικόνα του z συμπίπτει με το A και η μέγιστη όταν συμπίπτει με το B.

Είναι $(OK) = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$(OA) = (OK) - (AK) = \sqrt{10} - 2$

$(OB) = (OK) + (KB) = \sqrt{10} + 2$

Η (1) γίνεται $\sqrt{10} - 2 \le |z| \le \sqrt{10} + 2$

11.

Για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\dfrac{2005\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2} + \dfrac{1}{2}\left|2005 + 2005i\sqrt{3}\right| = 0$

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$ εκτός του σημείου του $\Lambda(1, 0)$

ii) Από τους παραπάνω z, να βρείτε εκείνον που έχει το μικρότερο και εκείνον που έχει το μεγαλύτερο μέτρο.

iii) Να βρείτε εκείνον το μιγαδικό z, του οποίου η εικόνα απέχει την ποιο μεγάλη απόσταση από το μιγαδικό $w = 2 - \dfrac{1}{2}i$, όπως και εκείνον του οποίου η εικόνα απέχει την ποιο μικρή απόσταση από το μιγαδικό $w = 2 - \dfrac{1}{2}i$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: $|z-1|^2 \ne 0 \iff |z-1| \ne 0 \iff z - 1 \ne 0 \iff z \ne 1$

i)

Έστω $z = x + yi$ με $(x, y) \ne (1, 0)$

Η δοσμένη σχέση γράφεται $\dfrac{2005y}{(x-1)^2 + y^2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2005^2 + 3\cdot 2005^2} = 0$

$$\frac{2005y}{(x-1)^2 + y^2} + 2005 = 0$$

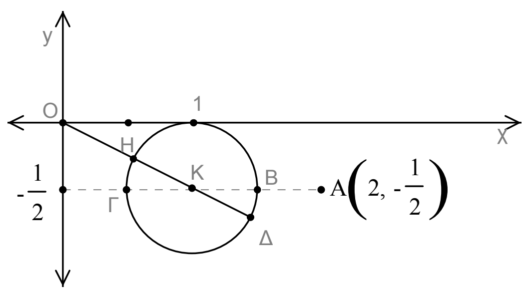
$$\frac{y}{(x-1)^2 + y^2} + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 1 - 4 = 1 > 0$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$ εκτός του σημείου του $\Lambda(1, 0)$ λόγω του περιορισμού.

ii)

Φέρνοντας την ΟΚ, παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός που έχει το ποιο μικρό μέτρο, έχει εικόνα το Η, ενώ ο μιγαδικός με το μεγαλύτερο



μέτρο έχει εικόνα το Δ.

(Για την απόδειξη βλέπε άσκηση 2)

Εύκολα βρίσκουμε ότι η ευθεία ΟΚ έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x$.

Θεωρία 1

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας βρίσκουμε ότι

$$x_\Delta = 1+\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{και} \quad y_\Delta = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}, \qquad x_H = 1-\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{και} \quad y_H = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}$$

Άρα ο μιγαδικός με το μικρότερο μέτρο είναι ο $1-\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right)i$

και με το μεγαλύτερο είναι ο $1+\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)i$

iii)

Η εικόνα του w είναι το σημείο $A\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$.

Η ΑΚ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Γ οπότε πλησιέστερα στο Α βρίσκεται το σημείο Β και μακρύτερα το Γ .

Η ΑΚ έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}$ και εύκολα βρίσκουμε, ότι τέμνει τον κύκλο στα

$B\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

Οπότε, ο μιγαδικός που απέχει λιγότερο από το Α είναι ο $z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ και

περισσότερο ο $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

12.

Έστω $w=\left(\frac{3}{2}+2i\right)z-\frac{5}{2}\bar{z}\cdot i$, όπου $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε τους Re(w) και Im(w) συναρτήσει των α, β.

ii) Να δείξτε ότι η εικόνα του αριθμού w διατρέχει την ευθεία $y=-\frac{1}{3}x$.

iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\Pi=|w-3-i|$

iv) Να δείξτε ότι $|w|=\sqrt{10}\left|\frac{\alpha-3\beta}{2}\right|$

v) Αν $|w|=\frac{\sqrt{10}}{2}$, να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών τις οποίες διατρέχει η εικόνα του z .

vi) Όταν ισχύει το **(v)** και z_1, z_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς z που δεν ανήκουν στην ίδια γραμμή, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ποσότητας $P=|z_1-z_2|$

Προτεινόμενη λύση .

i)

Κάνοντας αντικατάσταση στον w, όπου z = α + βi, μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$w = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta\right) + \left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta\right)i$$

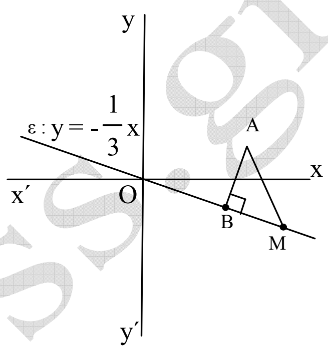
Άρα $\text{Re}(w) = \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta$ και $\text{Im}(w) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta$

ii)

Αν (x, y) τυχαία εικόνα του w, τότε $x = \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta$ και $y = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta$

Κάνοντας απαλοιφή των α και β βρίσκουμε ευθεία (ε) : $y = -\frac{1}{3}x$ **(1)**

iii)



Η παράσταση $\Pi = |w - 3 - i| = |w - (3 + i)|$
εκφράζει την απόσταση του σημείου A(3, 1)
από τα σημεία της ευθείας (ε). .
Φέρουμε $AB \perp$ ε.
Οπότε, για το οποιοδήποτε σημείο Μ της (ε)
είναι $AB \leq AM$
Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης Π είναι το (ΑΒ).
Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $y = 3x - 8$ **(2)**
(διέρχεται από το Α και είναι κάθετη (ε)).

Η λύση του συστήματος των (1), (2) δίνει $B\left(\frac{12}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

Επομένως, ο μιγαδικός w που η εικόνα του απέχει την μικρότερη απόσταση από το σημείο A(3, 1), είναι ο $w = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i$

iv)

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta\right)^2} = \text{πράξεις} = \sqrt{10}\left|\frac{\alpha - 3\beta}{2}\right|$$

v)

Αφού $|w| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, τότε από το (iv) θα έχουμε $\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}\left|\frac{\alpha - 3\beta}{2}\right|$

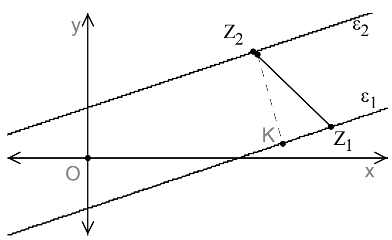
$|\alpha - 3\beta| = 1$

$\alpha - 3\beta = \pm 1$

Συνεπώς η εικόνα του z διατρέχει τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 :\ x - 3y = 1$

$\varepsilon_2 :\ x - 3y = -1$

vi)



Έστω Z_1 η εικόνα του τυχαίου $z_1 \in \varepsilon_1$
και Z_2 η εικόνα του τυχαίου $z_2 \in \varepsilon_2$
Έστω ακόμα Z_2K η απόσταση των ε_1, ε_2
Από το ορθογώνιο τρίγωνο KZ_1Z_2
έχουμε $Z_2K \leq Z_1Z_2$.
Οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης
$P = |z_1 - z_2|$ είναι ίση με την απόσταση

των δύο παραλλήλων.
Θεωρούμε συγκεκριμένο σημείο P της ε_2 (για $y = 0$, η εξίσωσή της δίνει $x = -1$), οπότε $P(-1, 0)$

$$|z_1 - z_2|_{min} = d(P, \varepsilon_1) = \frac{|-1-1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

13.

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$, όπου $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $z \neq 0$.

i) Να γράψετε τον $f(z)$ στην μορφή $\alpha + \beta i$

ii) Δείξτε ότι : $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$

iii) Αν ισχύει $f(z)\, f(\overline{z}) = 2$, να δείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

iv) Για τους μιγαδικούς του προηγούμενου ερωτήματος να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της ποσότητας $|f(z) - 1|$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f(z) = \frac{z+1}{z} = \frac{x+yi+1}{x+yi} = \frac{(x+yi+1)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

ii)

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \iff y = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}$$

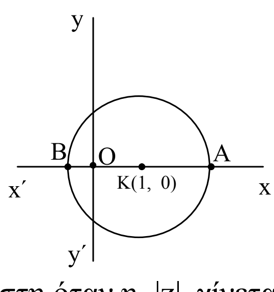
iii)

$$f(z)f(\overline{z}) = 2 \iff \frac{z+1}{z} \cdot \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}} = 2 \iff \frac{z \cdot \overline{z} + z + \overline{z} + 1}{z \cdot \overline{z}} = 2 \iff \frac{x^2+y^2+2x+1}{x^2+y^2} = 2$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = 2$$

Εξίσωση που παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, και στον οποίο δεν ανήκει το σημείο $O(0, 0)$. (Θυμίζουμε ότι δίνεται $z \neq 0 = 0 + 0i$)

iv)



Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι

$|z|_{max} = OA = 1 + \sqrt{2}$,

ενώ η ελάχιστη είναι $|z|_{min} = OB = \sqrt{2} - 1$

Όμως $$|f(z) - 1| = \left|\frac{z+1}{z} - 1\right| = \left|\frac{z+1-z}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \textbf{(1)}$$

πράγμα που σημαίνει ότι η ποσότητα $|f(z)-1|$ γίνεται ελάχιστη όταν η $|z|$ γίνεται μέγιστη και η ποσότητα $|f(z)-1|$ γίνεται μέγιστη όταν η $|z|$ γίνεται ελάχιστη.

Από την (1) θα είναι $$|f(z)-1|_{min} = \frac{1}{|z|_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1$$

Και $$|f(z)-1|_{max} = \frac{1}{|z|_{min}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} + 1$$

14.

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύει $w = 3z + \dfrac{1}{z}$ και οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο με κέντρο $O(0,\ 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w κινούνται σε έλλειψη.

ii) Να βρείτε **α)** τους μιγαδικούς w που έχουν το μικρότερο μέτρο

β) τους μιγαδικούς w που έχουν το μεγαλύτερο μέτρο

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $z = \kappa + \lambda i$

Τότε
$$w = 3z + \frac{1}{z} = 3\kappa + 3\lambda i + \frac{1}{\kappa + \lambda i}$$
$$= 3\kappa + 3\lambda i + \frac{\kappa - \lambda i}{(\kappa + \lambda i)(\kappa - \lambda i)}$$
$$= 3\kappa + 3\lambda i + \frac{\kappa - \lambda i}{\kappa^2 + \lambda^2}$$

Οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο $(O,\ 1)$ $\Rightarrow$ $\kappa^2 + \lambda^2 = 1$ **(1)**

Άρα
$$w = 3\kappa + 3\lambda i + \frac{\kappa - \lambda i}{1}$$
$$= 3\kappa + 3\lambda i + \kappa - \lambda i$$
$$= 4\kappa + 2\lambda i$$

Έστω $M(x,\ y)$ η εικόνα του τυχαίου w $\Leftrightarrow$ $x = 4\kappa$ και $y = 2\lambda$

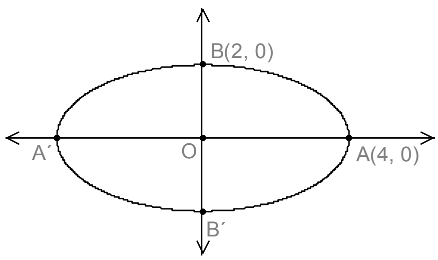
$\kappa = \dfrac{x}{4}$ και $\lambda = \dfrac{y}{2}$

Η (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, που είναι εξίσωση έλλειψης με εστίες στον άξονα $x'x$, μεγάλο ημιάξονα $\alpha = 4$ και μικρό ημιάξονα $\beta = 2$.

ii)

α) Οι μιγαδικοί w που έχουν το μικρότερο μέτρο, έχουν εικόνες τα σημεία Β, Β΄, επομένως είναι οι $w_1 = 2i$, $w_2 = -2i$

β) Οι μιγαδικοί w που έχουν το μεγαλύτερο μέτρο, έχουν εικόνες τα σημεία Α, Α΄, επομένως είναι οι $w_3 = 4$, $w_4 = -4$



15.

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z-1|+|z+1|=4$

ii) Από τους παραπάνω z, να βρείτε **α)** εκείνους που έχουν το μικρότερο μέτρο
β) εκείνους που έχουν το μεγαλύτερο μέτρο

Προτεινόμενη λύση

i)

$|z-1|+|z+1|=4 \quad \Leftrightarrow \quad |z-(1+0i)|+|z-(-1+0i)|=4$

Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των αποστάσεων των εικόνων των αριθμών z από τα σταθερά σημεία $E(1,\ 0)$, $E'(-1,\ 0)$ είναι σταθερό και ίσο με 4 .

Άρα οι εικόνες των z διατρέχουν έλλειψη με εστίες $E(1,\ 0)$, $E'(-1,\ 0)$ και μεγάλο άξονα 4 . Οπότε $\alpha=2$ και $\gamma=1$

$$\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 = 4-1=3$$

και η εξίσωση της έλλειψης θα είναι $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

ii)

Όπως η άσκηση 14

16.

Έστω μιγαδικός αριθμός $z\neq 2i$ και η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z}{z-2i}$

i) Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει $f(z)=1+i$

ii) Αν οι εικόνες των f(z) κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1,\ 0)$ και ακτίνα $\rho=1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $\Lambda(0,\ 2)$ και ακτίνα $R=2$.

iii) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς του ερωτήματος **(ii)** τέτοιοι ώστε $|z_1-z_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|=4$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f(z)=1+i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{z-2i}=1+i \quad \Leftrightarrow \quad z=z-2i+zi+2 \quad \Leftrightarrow \quad zi=2i-2 \quad \Leftrightarrow$$

$$z=2-\frac{2}{i} \quad \Leftrightarrow \quad z=2+2i$$

ii)

Οι εικόνες των f(z) κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1,\ 0)$ και ακτίνα $\rho=1$ $\Leftrightarrow$

$$|f(z)-1|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z}{z-2i}-1\right|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-z+2i}{z-2i}\right|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2i}{z-2i}\right|=1$$

$$\frac{2}{|z-2i|}=1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-2i|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |z-(0+2i)|=2$$

κύκλος με κέντρο $\Lambda(0,\ 2)$ και ακτίνα $R=2$

iii)

Έστω Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2.

$|z_1 - z_2| = 4 \quad \Rightarrow \quad (AB) = 4 = 2\,.\,2 = 2\rho$

Άρα το τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου Λ.

Οπότε $\quad |z_1 + z_2| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|2\overrightarrow{O\Lambda}\right|$

$= 2\left|\overrightarrow{O\Lambda}\right| = 2.\,2 = 4$