ΜΑΘΗΜΑ 5

2.3 Μέτρο μιγαδικού

Ασκήσεις

$z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$, $\quad z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

$|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$, $\quad |z| = \rho \Leftrightarrow z\bar{z} = \rho^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $(1 + iz)^{\nu} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z \in \mathbb{C}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι η εξίσωση έχει ρίζα $z = x \in \mathbb{R}$.

$z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

$$(1 + iz)^{\nu} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} \quad \Rightarrow \quad |(1+ix)^{\nu}| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\right|$$

$$|1+ix|^{\nu} = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|\sqrt{3}+i|}$$

$$|1+ix|^{\nu} = \frac{1+3}{3+1}$$

$$|1+ix|^{\nu} = 1$$

$$|1+ix| = 1$$

$$|1+ix|^2 = 1^2$$

$$1^2 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Η υπόθεση $(1 + iz)^{\nu} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$ γίνεται $(1 + i\cdot 0)^{\nu} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$

$$1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$$

$$\sqrt{3} + i = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = 1 \quad \text{που είναι άτοπο}$$

2.

Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $(2+iz)^{\nu} = \dfrac{3+5i}{5-3i}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z \in \mathbb{C}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 1

3.

Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $(1+iz)^{2011} = \dfrac{2011+i}{1+2011i}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 1

4.

Για τον $z \in \mathbb{C}$ δίνεται ότι $(3\overline{z}-1)^{55} = (z-3)^{55}$. Να αποδείξτε ότι $|z| = 1$.

Προτεινόμενη λύση

$$(3\overline{z}-1)^{55} = (z-3)^{55} \Rightarrow \left|(3\overline{z}-1)^{55}\right| = \left|(z-3)^{55}\right|$$

$$|3\overline{z}-1|^{55} = |z-3|^{55}$$

$$|3\overline{z}-1| = |z-3|$$

$$\boxed{z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|}$$

$$|3\overline{z}-1|^2 = |z-3|^2$$

$$(3\overline{z}-1)(3z-1) = (z-3)(\overline{z}-3)$$

$$9\overline{z}z - 3\overline{z} - 3z + 1 = z\overline{z} - 3z - 3\overline{z} + 9$$

$$8z\overline{z} = 8$$

$$|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

5.

Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ δίνεται ότι $(iz-3)^{100} = w(z+3i)^{100}$. Να αποδείξετε ότι $|w|=1$.

Προτεινόμενη λύση

$(iz-3)^{100} = w(z+3i)^{100} \Rightarrow \left|(iz-3)^{100}\right| = \left|w(z+3i)^{100}\right|$

$\boxed{z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|}$

$\left|(iz-3)^{100}\right| = |w|\left|(z+3i)^{100}\right|$

$|iz-3|^{100} = |w|\ |z+3i|^{100}$ **(1)**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|iz-3|^{100} = |z+3i|^{100}$

1^{ος} τρόπος

$|iz-3|^{100} = |z+3i|^{100} \Leftrightarrow |iz-3| = |z+3i|$

$|iz-3|^2 = |z+3i|^2$

$(iz-3)(-i\bar{z}-3) = (z+3i)(\bar{z}-3i)$

$z\bar{z} - 3iz + 3i\bar{z} + 9 = z\bar{z} - 3iz + 3i\bar{z} + 9$ που ισχύει

2^{ος} τρόπος

Είναι $iz - 3 = iz + 3i^2 \Rightarrow iz-3 = i(z+3i)$

$\boxed{|\alpha \pm \beta i| = |\beta \pm \alpha i|}$

$|iz-3| = |i|\ |z+3i|$

$|iz-3| = 1.|z+3i|$

$|iz-3|^{100} = |z+3i|^{100}$

6.

Για τον $z \in \mathbb{C}$ και τον $\nu \in \mathbb{N}^*$ δίνεται $z^\nu = 3+4i$ και $z^{\nu+1} = 2+11i$

Να βρείτε τους z, ν.

Προτεινόμενη λύση

$$z^{\nu+1} = 2+11i \Rightarrow z^\nu \cdot z = 2+11i$$
$$(3+4i)z = 2+11i$$
$$z = \frac{2+11i}{3+4i}$$

$$\boxed{z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|}$$

$$z = \frac{2+11i}{3+4i} \Rightarrow |z| = \left|\frac{2+11i}{3+4i}\right|$$
$$|z| = \frac{|2+11i|}{|3+4i|}$$
$$|z| = \frac{\sqrt{4+121}}{\sqrt{9+16}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5} \quad \textbf{(1)}$$

$$z^\nu = 3+4i \Rightarrow |z^\nu| = |3+4i|$$
$$|z|^\nu = \sqrt{9+16}$$
$$|z|^\nu = 5 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
$$(\sqrt{5})^\nu = 5 \Rightarrow 5^{\frac{\nu}{2}} = 5^1 \Rightarrow \frac{\nu}{2} = 1 \Rightarrow \nu = 2$$

7.

Αν για τον $z \in \mathbb{C}^*$ ισχύει $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$ να βρείτε τον z^5.

Προτεινόμενη λύση

$$\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \overline{z}^7 z^2 = 1$$

$$\left|\overline{z}^7 z^2\right| = 1$$

$$\left|\overline{z}^7\right| \left|z^2\right| = 1$$

$$\left|\overline{z}\right|^7 \left|z\right|^2 = 1$$

$$|z|^7 |z|^2 = 1$$

$$|z|^9 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

$$|z|^2 = 1$$

$$z\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$$

Η υπόθεση $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$ γίνεται $\left(\dfrac{1}{z}\right)^7 = \dfrac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z^7} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow z^7 = z^2 \Rightarrow z^5 = 1$$

8.

Αν για τον $z \in \mathbb{C}^*$ και τον $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $z^\nu = \overline{z}$, να βρείτε τον $z^{\nu+1}$.

Προτεινόμενη λύση

$$z^\nu = \overline{z} \Rightarrow z^\nu z = \overline{z}z \Rightarrow z^{\nu+1} = |z|^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$z^\nu = \overline{z} \Rightarrow \left|z^\nu\right| = \left|\overline{z}\right|$$

$$|z|^\nu = |z|$$

$$|z|^{\nu-1} = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Η (1) $\Rightarrow$ $z^{\nu+1} = 1$

9.

Δίνεται ότι, η εξίσωση $z = \left(\dfrac{2i - w}{2i + w}\right)^{1001}$ με άγνωστο w έχει πραγματική ρίζα.

Να αποδείξετε ότι

i) $|z| = 1$

ii) Όλες οι ρίζες της εξίσωσης είναι πραγματικές.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω α μια πραγματική ρίζα της εξίσωσης. Τότε $z = \left(\dfrac{2i - \alpha}{2i + \alpha}\right)^{1001}$ **(1)**

Είναι $\left|\dfrac{2i - \alpha}{2i + \alpha}\right| = \dfrac{|2i - \alpha|}{|2i + \alpha|} = \dfrac{\sqrt{4 + \alpha^2}}{\sqrt{4 + \alpha^2}} = 1$

$$\boxed{z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|}$$

(1) $\Rightarrow$ $|z| = 1^{1001} = 1$

ii)

Έστω $\alpha + \beta i$ με $\beta \neq 0$ μια μιγαδική ρίζα.

Τότε $z = \left(\dfrac{2i - (\alpha + \beta i)}{2i + \alpha + \beta i}\right)^{1001} = \left(\dfrac{2i - \alpha - \beta i)}{2i + \alpha + \beta i}\right)^{1001}$

Αλλά $|z| = 1 \Rightarrow \left|\left(\dfrac{2i - \alpha - \beta i)}{2i + \alpha + \beta i}\right)^{1001}\right| = 1$

$$\left|\frac{2i - \alpha - \beta i}{2i + \alpha + \beta i}\right|^{1001} = 1$$

$$\left|\frac{2i - \alpha - \beta i}{2i + \alpha + \beta i}\right| = 1$$

$$\frac{|-\alpha + (2 - \beta)i|}{|\alpha + (2 + \beta)i|} = 1$$

$$|-\alpha + (2 - \beta)i| = |\alpha + (2 + \beta)i|$$

$$\sqrt{\alpha^2 + (2 - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2 + \beta)^2}$$

$$\alpha^2 + 4 - 4\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 4 + 4\beta + \beta^2$$

$0 = 8\beta$ δηλαδή $\beta = 0$ που είναι άτοπο

10.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$, να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\overline{z}^5 z^9 = 1$ **ii)** $z^3 = |z|$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\overline{z}^5 z^9 = 1 \Rightarrow |\overline{z}^5 z^9| = 1$$

$$|\overline{z}^5|\,|z^9| = 1$$

$$|\overline{z}|^5\,|z|^9 = 1$$

$$|z|^{14} = 1$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$$

$$\overline{z}^5 z^9 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^5 z^9 = 1$$

$$\frac{1}{z^5}\, z^9 = 1$$

$$z^4 = 1$$

$$z^2 = 1 \quad \text{ή} \quad z^2 = -1$$

$$z = \pm 1 \quad \text{ή} \quad z = \pm i$$

ii)

Λύσε με τον ίδιο τρόπο

11.

Αποδείξτε ότι κάθε ρίζα της εξίσωσης $(z+2)^{\nu}-z^{\nu}=0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, από το σύνολο $\mathbb{C}$, έχει πραγματικό μέρος -1.

Προτεινόμενη λύση

$$(z+2)^{\nu}-z^{\nu}=0 \quad\Rightarrow\quad (z+2)^{\nu}=z^{\nu}$$

$$\left|(z+2)^{\nu}\right|=\left|z^{\nu}\right|$$

$$|z+2|^{\nu}=|z|^{\nu}$$

$$|z+2|=|z|$$

$$|z+2|^{2}=|z|^{2}$$

$$(z+2)(\bar{z}+2)=z\bar{z}$$

$$z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4=z\bar{z}$$

$$2(z+\bar{z})=-4$$

$$2\cdot 2\mathrm{Re}(z)=-4 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Re}(z)=-1$$

12.

Αν $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ ώστε $|z_1|=|z_2|=1$, αποδείξτε ότι

$|z_1-2z_2+3z_1z_2-4|=|z_2-2z_1+3-4z_1z_2|$.

Προτεινόμενη λύση

$$|z_1|=1 \;\Leftrightarrow\; |z_1|^2=1 \;\Leftrightarrow\; z_1\bar{z}_1=1 \;\Leftrightarrow\; \bar{z}_1=\frac{1}{z_1} \quad \text{και ομοίως} \quad \bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$$

$$\boxed{|z|=1 \;\Leftrightarrow\; z\bar{z}=1}$$

$$|z_1-2z_2+3z_1z_2-4| = \left|\overline{z_1-2z_2+3z_1z_2-4}\right|$$

$$=\left|\bar{z}_1-2\bar{z}_2+3\bar{z}_1\bar{z}_2-4\right|$$

$$=\left|\frac{1}{z_1}-2\frac{1}{z_2}+3\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}-4\right|$$

$$=\left|\frac{z_2-2z_1+3-4z_1z_2}{z_1z_2}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{z_1z_2}\right|\,|z_2-2z_1+3-4z_1z_2|$$

$$=\frac{1}{|z_1||z_2|}\,|z_2-2z_1+3-4z_1z_2|$$

$$=\frac{1}{1\cdot 1}\,|z_2-2z_1+3-4z_1z_2|=|z_2-2z_1+3-4z_1z_2|$$

13.

Αν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 8$ και

$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = \frac{1}{8}$ αποδείξτε ότι $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 8$.

Προτεινόμενη λύση

$$\boxed{|z| = \rho \Leftrightarrow z\bar{z} = \rho^2}$$

$$|z_1| = 8 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 64 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} = \frac{1}{64}\bar{z}_1$$

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{64}\bar{z}_1 + \frac{1}{64}\bar{z}_2 + \frac{1}{64}\bar{z}_3 + \frac{1}{64}\bar{z}_4 = \frac{1}{8}$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_4 = 8$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 8,$$

14.

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| \neq 0$, αποδείξτε ότι ο $w = \frac{(z_1 + z_2)^\nu}{z_1^\nu + z_2^\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, είναι πραγματικός.

Προτεινόμενη λύση

$$\boxed{\text{Αντί των } z_1, z_2 \text{ ο } \frac{z_1}{z_2}}$$

$$|z_1| = |z_2| \neq 0 \Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1.$$

Θέτουμε $\frac{z_1}{z_2} = z$, οπότε $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

Είναι $$w = \frac{(z_1 + z_2)^\nu}{z_1^\nu + z_2^\nu} = \frac{\dfrac{(z_1 + z_2)^\nu}{z_2^\nu}}{\dfrac{z_1^\nu + z_2^\nu}{z_2^\nu}} = \frac{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{z_2}\right)^\nu}{\dfrac{z_1^\nu}{z_2^\nu} + 1} = \frac{\left(\dfrac{z_1}{z_2} + 1\right)^\nu}{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^\nu + 1} .= \frac{(z+1)^\nu}{z^\nu + 1} \quad \textbf{(1)}$$

$$\bar{w} = \overline{\left(\frac{(z+1)^\nu}{z^\nu + 1}\right)} = \frac{(\bar{z} + 1)^\nu}{\bar{z}^\nu + 1} = \frac{\left(\dfrac{1}{z} + 1\right)^\nu}{\left(\dfrac{1}{z}\right)^\nu + 1} = \frac{\left(\dfrac{1+z}{z}\right)^\nu}{\dfrac{1}{z^\nu} + 1} = \frac{\dfrac{(1+z)^\nu}{z^\nu}}{\dfrac{1 + z^\nu}{z^\nu}} = \frac{(1+z)^\nu}{1 + z^\nu} \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $w = \bar{w}$, άρα w πραγματικός.

15.

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \rho \neq 0$ και οι μιγαδικοί $w = \dfrac{z_1 + z_2}{\rho^2 + z_1 z_2}$, $v = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$.
Αποδείξτε ότι ο w είναι πραγματικός και ο v είναι φανταστικός.

Υπόδειξη

$$|z_1| = |z_2| = \rho \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1} = \frac{\rho^2}{z_1} \quad \text{και} \quad \overline{z_2} = \frac{\rho^2}{z_2}$$

$$\overline{w} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\rho^2 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad = w$$

16.

Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $z \neq w$ και $|z| = |w|$. Να αποδείξτε ότι ο $\left(\dfrac{z+w}{z-w}\right)^{2002}$ είναι πραγματικός και ο $\left(\dfrac{z+w}{z-w}\right)^{2003}$ είναι φανταστικός.

Προτεινόμενη λύση

Αντί των z_1, z_2 ο $\dfrac{z_1}{z_2}$

$$|z| = |w| \Rightarrow \frac{|z|}{|w|} = 1 \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = 1$$

Θέτουμε $\dfrac{z}{w} = u$, οπότε $|u| = 1 \Rightarrow \bar{u} = \dfrac{1}{u}$ **(1)**

Θα είναι $\dfrac{z+w}{z-w} = \dfrac{\frac{z}{w}+1}{\frac{z}{w}-1} = \dfrac{u+1}{u-1}$ **(2)**

$$\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2002} \text{ πραγματικός } \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2002}} = \left(\frac{z+w}{z-w}\right)^{2002} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$\boxed{z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}}$

$$\overline{\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{2002}} = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{2002}$$

$$\left(\frac{\bar{u}+1}{\bar{u}-1}\right)^{2002} = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{2002} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}-1}\right)^{2002} = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{2002}$$

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{2002} = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{2002}$$ που ισχύει αφού ο 2002 είναι άρτιος

Ομοίως $\left(\dfrac{z+w}{z-w}\right)^{2003}$ φανταστικός.

17.

Αν για τους μιγαδικούς z_1 , z_2 ισχύει $(z_1+z_2)^{2010}=(z_1-z_2)^{2010}$, να αποδείξετε ότι ο $z_1\bar{z}_2$ είναι φανταστικός.

Προτεινόμενη λύση

$$(z_1+z_2)^{2010}=(z_1-z_2)^{2010} \Rightarrow \left|(z_1+z_2)^{2010}\right|=\left|(z_1-z_2)^{2010}\right|$$

$$\boxed{z_1=z_2 \Rightarrow |z_1|=|z_2|}$$

$$|z_1+z_2|^{2010}=|z_1-z_2|^{2010}$$

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2$$

$$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$$

$$2z_1\bar{z}_2+2z_2\bar{z}_1=0$$

$$2(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)=0$$

$$z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=0$$

$$2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$$

Άρα $z_1\bar{z}_2$ φανταστικός

18.

Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w, για τους οποίους ισχύει $|z| = |w| = 1$ και

$z + w + 1 = zw$.

Προτεινόμενη λύση

$|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ και ομοίως $\bar{w} = \frac{1}{w}$ **(1)**

$$z + w + 1 = zw \Leftrightarrow \overline{z + w + 1} = \overline{zw}$$

$$\bar{z} + \bar{w} + 1 = \bar{z}\,\bar{w}$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{w} + 1 = \frac{1}{z}\frac{1}{w} \Leftrightarrow w + z + wz = 1 \quad \textbf{(2)}$$

Από υπόθεση έχουμε $zw = z + w + 1$ **(3)**

Λύνουμε το σύστημα των (2), (3)

$$\begin{cases} w+z = 1-wz \\ zw = 1-wz+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w+z = 1-wz \\ 2zw = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w+z = 1-wz \\ zw = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w+z = 0 \\ zw = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w=-z \\ zw = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w=-z \\ -z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w=-z \\ z^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=-z \\ z = i \text{ ή } -i \end{cases}$$

Άρα $(z = i$ και $w = -i)$ ή $(z = -i$ και $w = i)$

19.

Για τους $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ δίνεται ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους z_1, z_2, z_3 είναι ίσοι.

Προτεινόμενη λύση

$|z_1| = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ και ομοίως για τους z_2, z_3

Έστω $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = x \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = x\, z_1 z_2 z_3$ **(1)**

Συζυγής στα δύο μέλη ισότητας

$$(1) \Rightarrow \bar{z}_1^2 \bar{z}_3 + \bar{z}_2^2 \bar{z}_1 + \bar{z}_3^2 \bar{z}_2 = x\, \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$$

$$\frac{1}{z_1^2}\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2^2}\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3^2}\frac{1}{z_2} = x \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3}$$

$$z_3 z_2^2 + z_1 z_3^2 + z_2 z_1^2 = x z_1 z_2 z_3 \quad \textbf{(2)}$$

Αρκεί ν αποδείξουμε ότι $(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 - z_3) = 0$

Είναι $(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 - z_3) = \cancel{z_2 z_3 z_1} - z_2 z_3^2 - z_2^2 z_1 + z_2^2 z_3 - z_1^2 z_3 + z_1 z_3^2 + z_1^2 z_2 - \cancel{z_1 z_2 z_3}$

$$= (z_2^2 z_3 + z_1 z_3^2 + z_1^2 z_2) - (z_2 z_3^2 + z_2^2 z_1 + z_1^2 z_3)$$

$$\overset{(2),(1)}{=} x z_1 z_2 z_3 - x z_1 z_2 z_3 = 0$$

20.

Αν $|z_1| = |z_2| = 1$ να αποδείξετε ότι $(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \le 4$

Προτεινόμενη λύση

$|z_1| = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ και ομοίως $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$

Αρκεί να δειχθεί ότι $(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \le 4$

$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \le 4$$

$$|z_1 + z_2|^2 \le 4$$

Για να αποδείξουμε ανισότητα, υποψιαζόμαστε την τριγωνική

Είναι $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$$|z_1 + z_2| \le 1 + 1 = 2$$

$$|z_1 + z_2|^2 \le 4$$

21.

Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ να αποδείξετε ότι $(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \le 16$.

Προτεινόμενη λύση

$|z| = \rho \iff z\overline{z} = \rho^2$

$|z_1| = 2 \Rightarrow |z_1|^2 = 4 \Rightarrow z_1\overline{z}_1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4}\overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}$

Αρκεί να δειχθεί ότι $(z_1 + z_2 + z_3)(\frac{1}{4}\overline{z}_1 + \frac{1}{4}\overline{z}_2 + \frac{1}{4}\overline{z}_3) \le 16$

$(z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) \le 64$

$|z_1 + z_2 + z_3|^2 \le 64$

$|z_1 + z_2 + z_3| \le 8$

Για να αποδείξουμε ανισότητα, υποψιαζόμαστε την τριγωνική

Είναι $|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$

$|z_1 + z_2 + z_3| \le 2 + 2 + 2 = 6 < 8$