ΜΑΘΗΜΑ 4
2.3 Μέτρο μιγαδικού αριθμού
Θεωρία - Σχόλια – Μέθοδοι

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ορισμός
Αν $z = x + yi$ τότε $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.
Μέτρο αντιθέτων και συζυγών
$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

3.
Ιδιαίτερη προσοχή
$|z|^2 = z\overline{z}$, οπότε $\overline{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$ και $z = \dfrac{|z|^2}{\overline{z}}$ για $z \neq 0$

4.
Το γινόμενο
$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ και για περισσότερους παράγοντες

5.
Το πηλίκο
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

6.
Η δύναμη
$|z^\nu| = |z|^\nu$ Ο εκθέτης μπαινοβγαίνει στο μέτρο

7.
Η τριγωνική ανισότητα
$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

8.
Απόσταση δύο εικόνων
$(M_1M_2) = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

9.
Εξίσωση του κύκλου
με κέντρο $M(z_0)$ και ακτίνα ρ : $|z-z_0|=\rho$.

10.
Εξίσωση της μεσοκαθέτου
$|z-z_1|=|z-z_2|$.

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Η απόσταση (ΟΜ)
Το $|z|$ εκφράζει την απόσταση της εικόνας του z από την αρχή Ο.

2.
Μέτρο $\equiv$ απόλυτη τιμή
Αν $z\in\mathbb{R}$ τότε $z=x$ τότε $|z|=\sqrt{x^2}=|x|$, δηλαδή το μέτρο ταυτίζεται με την απόλυτη τιμή όταν πρόκειται για πραγματικό αριθμό.
Παρατήρηση. Αν $z=yi$ τότε $|z|=\sqrt{y^2}=|y|$

3.
Το μέτρο του i
$|i|=1$

4.
Χρήσιμη λεπτομέρεια
$z_1=z_2 \Rightarrow |z_1|=|z_2|$ **Προσοχή, όχι αντίστροφα**

5.
Χρήσιμη λεπτομέρεια
$z=0 \Leftrightarrow |z|=0$ **Εδώ ισχύει και αντίστροφα**

6.
Χρήσιμη λεπτομέρεια
$|\pm\alpha\pm\beta i|=|\pm\beta\pm\alpha i|$

7.
Σε πολλές ασκήσεις
$|z|=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$.

8.

Γενίκευση του 7

$|z| = \rho \iff z = \frac{\rho^2}{\overline{z}}$ και $|z| = \rho \iff \overline{z} = \frac{\rho^2}{z}$

9.

Προσοχή στο λάθος : $|z|^2 = z^2$

(Ισχύει μόνο στους πραγματικούς αριθμούς)

Το σωστό είναι: $|z|^2 = z^2 \iff z \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

$$|z|^2 = z^2 \iff z\overline{z} = z^2$$
$$z\overline{z} - z^2 = 0$$
$$z(\overline{z} - z) = 0$$
$$z = 0 \text{ ή } \overline{z} - z = 0$$
$$z = 0 \text{ ή } \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$$

Ίδιο λάθος $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)^2 =$ ………

Το σωστό είναι $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) =$ …………..

Ομοίως ισχύει : $|z|^2 = -z^2 \iff z$ φανταστικός.

10.

Εξωτερικό κύκλου

με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ : $|z - z_0| > \rho$

11.

Εσωτερικό κύκλου

με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ: $|z - z_0| < \rho$

$M(z)$ εσωτερικό σημείο του κύκλου $(K(z_0)\ ,\ \rho)$

12.

Το ισοσκελές τρίγωνο

$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \iff$ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ορίζουν ισοσκελές τρίγωνο (εφόσον δεν είναι συνευθειακά σημεία)

13.

Το ισόπλευρο τρίγωνο

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \iff$ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο (εφόσον δεν είναι συνευθειακά σημεία)

14.

Το Πυθαγόρειο

$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 = |z_3 - z_2|^2 \quad \Leftrightarrow$ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο (εφόσον δεν είναι συνευθειακά σημεία)

15.

Εξίσωση έλλειψης

με εστίες τις εικόνες των z_1, z_2: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

16.

Εξίσωση υπερβολής

με εστίες τις εικόνες των z_1, z_2: $\left||z - z_1| - |z - z_2|\right| = 2a$

17.

Η παραλληλία διανυσματικών ακτίνων

$$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM_1} \parallel \overrightarrow{OM_2}$$

Απόδειξη

$$\frac{z_1}{z_2} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \lambda z_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 + y_1 i = \lambda(x_2 + y_2 i)$$

$$x_1 = \lambda x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = \lambda y_2$$

$$(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \lambda\, \overrightarrow{OM_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM_1} \parallel \overrightarrow{OM_2}$$

18.

Η καθετότητα διανυσματικών ακτίνων

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ φανταστικός} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$$

Απόδειξη

$$\frac{z_1}{z_2} = \lambda i \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \lambda i z_2$$

$$x_1 + y_1 i = \lambda i(x_2 + y_2 i)$$

$$x_1 + y_1 i = \lambda i\, x_2 - \lambda y_2$$

$$x_1 = -\lambda y_2 \quad \text{και} \quad y_1 = \lambda x_2$$

$$x_1 = -\lambda y_2 \quad \text{και} \quad \lambda x_2 = y_1$$

(πολλ/με κατά μέλη) $\quad x_1\, \lambda x_2 = -\lambda y_2\, y_1$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$$

19.

Ομόρροπες διανυσματικές ακτίνες

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ οι διανυσματικές ακτίνες των z_1, z_2 είναι ομόρροπες

Απόδειξη

Έστω $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ οι διανυσματικές ακτίνες των z_1, z_2

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{\delta}_1+\vec{\delta}_2| = |\vec{\delta}_1|+|\vec{\delta}_2|$$

$$|\vec{\delta}_1+\vec{\delta}_2|^2 = (|\vec{\delta}_1|+|\vec{\delta}_2|)^2$$

$$(\vec{\delta}_1+\vec{\delta}_2)^2 = |\vec{\delta}_1|^2+2|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2| + |\vec{\delta}_2|^2$$

$$\vec{\delta}_1^{\,2}+2\,\vec{\delta}_1.\vec{\delta}_2+\vec{\delta}_2^{\,2} = |\vec{\delta}_1|^2+2|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2| + |\vec{\delta}_2|^2$$

$$\vec{\delta}_1.\vec{\delta}_2 = |\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2 \ \text{ομόρροπα}$$

20.

Αντίρροπες διανυσματικές ακτίνες

$||z_1|-|z_2|| = |z_1+z_2| \quad \Leftrightarrow$ οι διανυσματικές ακτίνες των z_1, z_2 αντίρροπες.

Απόδειξη

Ακολούθησε το 19