ΜΑΘΗΜΑ 3
2.2 Πράξεις – Συζυγής
Ασκήσεις
Εξισώσεις – Από σχέση σε σχέση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 = 2z - 7$, να αποδείξετε ότι
$\dfrac{3z_1 + 2i + 3z_2}{z_1 z_2 - 5} = 3 + i$.

Προτεινόμενη λύση

$z^2 = 2z - 7 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 7 = 0$

$z_1 + z_2 = -\dfrac{-2}{1} = 2$, $\quad z_1 z_2 = \dfrac{7}{1} = 7$

$$\frac{3z_1 + 2i + 3z_2}{z_1 z_2 - 5} = \frac{3(z_1 + z_2) + 2i}{z_1 z_2 - 5} = \frac{3 \cdot 2 + 2i}{7 - 5} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$$

2.

Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z = -3 - \dfrac{2}{3} z^2$, να αποδείξετε ότι

$\dfrac{2i - z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} = -\dfrac{3 + 4i}{7}$

Υπόδειξη

$z = -3 - \dfrac{2}{3} z^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3z = -9 - 2z^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2z^2 + 3z + 9 = 0$

και ακολούθησε την άσκηση 1

3.

Αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $\alpha z^2 + z + \beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το μιγαδικό $1 - 2i$, να βρείτε τους α , β .

Προτεινόμενη λύση

Η ρίζα επαληθεύει την εξίσωση $\alpha(1-2i)^2 + 1 - 2i + \beta = 0$

$$\alpha\,[1 - 4i + (2i)^2] + 1 - 2i + \beta = 0$$

$$\alpha\,[1 - 4i - 4] + 1 - 2i + \beta = 0$$

$$-3\alpha - 4\alpha i + 1 - 2i + \beta = 0$$

$$(-3\alpha + 1 + \beta) - (4\alpha + 2) = 0$$

$$-3\alpha + 1 + \beta = 0 \quad \text{και} \quad 4\alpha + 2 = 0$$

$$\beta = 3\alpha - 1 \quad \text{και} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = 3(-\frac{1}{2}) - 1 \quad \text{και} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = -\frac{3}{2} - 1 \quad \text{και} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = -\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

4.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λυθεί η εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0 \iff (z^3 + 3z^2) + (3z + 9) = 0$$

Παραγοντοποίηση

$$z^2(z + 3) + 3(z + 3) = 0$$

$$(z + 3)(z^2 + 3) = 0$$

$$z + 3 = 0 \quad \text{ή} \quad z^2 + 3 = 0$$

$$z = -3 \quad \text{ή} \quad z^2 = -3$$

$$z = -3 \quad \text{ή} \quad z = \sqrt{3}\,i \quad \text{ή} \quad z = -\sqrt{3}\,i$$

5.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λυθεί η εξίσωση $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$.

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 4

6.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λυθεί η εξίσωση $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^3 - 1) - 2(z^2 - z) = 0$$

$$(z-1)(z^2 + z + 1) - 2z(z-1) = 0$$

$$(z-1)(z^2 + z + 1 - 2z) = 0$$

$$(z-1)(z^2 - z + 1) = 0$$

$$z - 1 = 0 \quad ή \quad z^2 - z + 1 = 0 \qquad (\Delta = 1 - 4 = -3)$$

$$z - 1 = 0 \quad ή \quad z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

7.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λυθεί η εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0$

Παραγοντοποίηση
Σχήμα Horner

Υπόδειξη .

Σχήμα Horner με έναν από τους διαιρέτες ± 1 , ± 7 του 7.

Η εξίσωση γίνεται $(z-1)(z^2 + 4z + 7) = 0$

8.
Να δείξετε ότι, δύο από τις ρίζες της εξίσωσης $z^3=1$ είναι ρίζες και της εξίσωσης $(z+1)^{11}-z^{11}-1=0$.

Προτεινόμενη λύση

$z^3=1$ **(1)** $\Leftrightarrow$ $z^3-1=0$

$(z-1)(z^2+z+1)=0$

$z-1=0$ ή $z^2+z+1=0$

$z=1$ ή $z+1=-z^2$ **(2)**

- Όταν $z=1$, τότε $(z+1)^{11}-z^{11}-1=(1+1)^{11}-1^{11}-1$

$$=2^{11}-1-1=2^{11}-2\neq 0$$

- Όταν $z+1=-z^2$, τότε

$$(z+1)^{11}-z^{11}-1\overset{(2)}{=}\left(-z^2\right)^{11}-z^{11}-1$$
$$=-z^{22}-z^{11}-1$$
$$=-\left(z^3\right)^7z-\left(z^3\right)^3z^2-1$$
$$\overset{(1)}{=}-1^7z-1^3z^2-1$$
$$=-z-z^2-1$$
$$=-z^2-(z+1)$$
$$\overset{(2)}{=}z+1-(z+1)=0$$

Από μικρότερο εκθέτη σε μεγαλύτερο

9.

Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+2z+2=0$, να βρείτε κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=0$.

Προτεινόμενη λύση

$\Delta = 4-8=-4$, $\quad z_{1,2} = \dfrac{-2\pm i\cdot 2}{2} = -1 \pm i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=0 \Leftrightarrow z_1^{\nu}=-z_2^{\nu}$$

$$\frac{z_1^{\nu}}{z_2^{\nu}}=-1 \qquad z_1,z_2$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\nu}=-1 \Leftrightarrow (-i)^{\nu}=-1 \qquad \textbf{(1)}$$

Αντί να δουλεύουμε με δύο μιγαδικούς z_1 , z_2 δουλεύουμε με έναν, τον $\dfrac{z_1}{z_2}$

- Για $\nu=4\kappa$, είναι $(-i)^{4\kappa}=1$, δεν ικανοποιείται η (1)
- Για $\nu=4\kappa+1$, είναι $(-i)^{4\kappa+1}=(-i)^{4\kappa}(-i)$
  $=1(-i)=-i$, δεν ικανοποιείται η (1)
- Για $\nu=4\kappa+2$, είναι $(-i)^{4\kappa+2}=(-i)^{4\kappa}(-i)^2$
  $=1(-1)=-1$ ικανοποιείται η (1)
- Για $\nu=4\kappa+3$, είναι $(-i)^{4\kappa+3}=(-i)^{4\kappa}(-i)^3$
  $=1(i)=i$, δεν ικανοποιείται η (1)

Επομένως $\nu=4\kappa+2$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

10.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 4συνθ \cdot z + 4 = 0$, όπου $0 < θ < π$,
Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι, καθώς το $θ$ μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,\ π)$, οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης κινούνται στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Προτεινόμενη λύση

$Δ = 16\ συν^2θ - 16 = -16\,(1 - συν^2θ) = -16\ ημ^2θ$

$z = \dfrac{4συνθ \pm 4iημθ}{2} = 2(συνθ \pm ημθ) = 2συνθ \pm 2ημθ$

$|z|^2 = (2συνθ)^2 + (2ημθ)^2 = 4συν^2θ + 4ημ^2θ = 4(συν^2θ + ημ^2θ) = 4 \cdot 1 = 4$

Άρα $|z| = 2$, οπότε η εικόνα του z κινείται στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή

των αξόνων και ακτίνα 2.

11.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 4συνθ \cdot z + 4συν^2θ + 9ημ^2θ = 0$, όπου $θ \in \mathbb{R}$.
Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι, καθώς το $θ$ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης κινούνται σε μια έλλειψη.

Προτεινόμενη λύση

$Δ = 16συν^2θ - 4(4συν^2θ + 9ημ^2θ)$

$= 16συν^2θ - 16συν^2θ - 36ημ^2θ$

$= -36ημ^2θ$

$z = \dfrac{4συνθ \pm 6iημθ}{2} = 2συνθ + 3iημθ$ ή $2συνθ - 3iημθ$

Έστω $z = x + yi$

Θα είναι $x = 2συνθ$ και $y = \pm 3ημθ \Rightarrow$

$x^2 = 4συν^2θ$ και $y^2 = 9ημ^2θ$

$συν^2θ = \dfrac{x^2}{4}$ και $ημ^2θ = \dfrac{y^2}{9}$

Αλλά $συν^2θ + ημ^2θ = 1$, άρα $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ που είναι εξίσωση έλλειψης.

12.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λύσετε την εξίσωση

$\eta\mu^2\theta \cdot z^2 - 4\eta\mu\theta \cdot z + 4 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0,$ όπου $\theta \in (0\,,\,\pi)$.

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι, καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα $(0\,,\,\pi)$, οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης κινούνται σε μια υπερβολή.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\Delta &= 16\,\eta\mu^2\theta - 4\,\eta\mu^2\theta\,(4 + \sigma\upsilon\nu^2\theta)\\ &= 16\,\eta\mu^2\theta - 16\,\eta\mu^2\theta - 4\,\eta\mu^2\theta\;\sigma\upsilon\nu^2\theta\\ &= -4\,\eta\mu^2\theta\;\sigma\upsilon\nu^2\theta\end{aligned}$$

$$z = \frac{4\eta\mu\theta \pm 2i\eta\mu\theta\;\sigma\upsilon\nu\theta}{2\eta\mu^2\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta} \pm i\,\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Έστω $z = x + yi$

Θα είναι $x = \dfrac{2}{\eta\mu\theta}$ και $y = \pm\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \Rightarrow$

$x\;\eta\mu\theta = 2$ και $y\;\eta\mu\theta = \pm\,\sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu\theta = \dfrac{2}{x}$ και $y\,\dfrac{2}{x} = \pm\,\sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu\theta = \dfrac{2}{x}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \pm\,y\,\dfrac{2}{x}$

Αλλά $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$, άρα $\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4y^2}{x^2} = 1$

$$4 + 4y^2 = x^2$$

$$x^2 - 4y^2 = 4$$

$\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ που είναι εξίσωση υπερβολής

13.

Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, έτσι ώστε να ισχύει $z^\nu + z^{\nu-1} + \ldots + z + 1 = 0$.

Να αποδείξετε ότι $z^{2010\nu} = z^{-2010}$.

Προτεινόμενη λύση

$z^\nu + z^{\nu-1} + \ldots + z + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad (z-1)\,(z^\nu + z^{\nu-1} + \ldots + z + 1) = 0$

$$z^{\nu+1} - 1 = 0$$

$$z^{\nu+1} = 1$$

$$z^\nu \cdot z = 1$$

$$z^\nu = \frac{1}{z}$$

$$z^\nu = z^{-1}$$

$(z^\nu)^{2010} = (z^{-1})^{2010} \quad\Rightarrow\quad z^{2010\nu} = z^{-2010}$

14.

Για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ δίνεται ότι $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = 1$. Να αποδείξετε ότι

i) $z_1^{\,3} + z_2^{\,3} = 0$ **ii)** $(z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$$

$$z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$(z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2) = 0 \cdot (z_1 + z_2)$$

$$z_1^{\,3} + z_2^{\,3} = 0$$

ii)

$$(z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2 = -z_1 z_2$$

$$z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0$$ που ισχύει από την (1)

15.

Αν $z \in \mathbb{C}^*$ και $z^2 - z + 1 = 0$, να αποδείξετε ότι **i)** $z^3 = -1$

ii) $z^5 = 1 - z$

iii) $z^8 + z^{-8} = -1$.

Προτεινόμενη λύση

$$z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = z - 1$$

i)

$$z^3 = z^2 \cdot z = (z-1)z = z^2 - z = z - 1 - z = -1$$

ii)

$$z^5 = z^3 \cdot z^2 = -1(z-1) = 1 - z$$

Από μεγαλύτερο εκθέτη σε μικρότερο

iii)

Αρκεί να δειχθεί ότι $z^8 + \dfrac{1}{z^8} = -1$

$$z^{16} + 1 = -z^8$$

$$z^{16} + z^8 = -1.$$

Είναι $z^8 = z^5 \cdot z^3 = (1-z)(-1) = z - 1$ **(1)**

$$z^{16} = (z^8)^2 = (z-1)^2 = z^2 - 2z + 1 = z - 1 - 2z + 1 = -z \quad \textbf{(2)}$$

$(1) + (2) \Rightarrow z^{16} + z^8 = -z + z - 1 = -1$

16.

Αν $z \in \mathbb{C}^*$ και $z + \dfrac{1}{z} = -1$, να αποδείξετε ότι $z^5 + \dfrac{1}{z^5} = z^{11} + \dfrac{1}{z^{11}}$.

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση $z + \dfrac{1}{z} = -1 \Rightarrow z^2 + 1 = -z \Rightarrow z^2 = -z - 1$ **(1)**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $z^5 + \dfrac{1}{z^5} = z^{11} + \dfrac{1}{z^{11}}$

$$z^{16} + z^6 = z^{22} + 1 \qquad \textbf{(A)}$$

Θα εκφράσουμε κάθε μία από τις δυνάμεις

(1) $\Rightarrow \quad z^4 = (-z-1)^2 = z^2 + 2z + 1 \overset{(1)}{=} -z - 1 + 2z + 1 = z$ **(2)**

$z^6 = z^4 z^2 = z(-z-1) = -z^2 - z \overset{(1)}{=} z + 1 - z = 1$ **(3)**

$z^{16} = (z^4)^4 \overset{(2)}{=} z^4 \overset{(2)}{=} z$ **(4)**

Από μικρότερο εκθέτη σε μεγαλύτερο

(3) + (4) $\Rightarrow \quad z^{16} + z^6 = z + 1$ **(5)**

$z^{22} = z^{16} z^6 \overset{(4),(3)}{=} z \cdot 1 = z \Rightarrow z^{22} + 1 = z + 1$ **(6)**

Από τις (5), (6) $\Rightarrow \quad z^{16} + z^6 = z^{22} + 1$ δηλαδή η (A)

17.

Δίνεται ο μιγαδικός $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ και ο $z_2 = 1 + z_1$. Να αποδείξετε ότι

i) $1 + z_1 + {z_1}^2 = 0$

ii) ${z_1}^3 = 1$

iii) ${z_2}^{2\nu} = {z_1}^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$z_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - 2\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$1 + z_1 + {z_1}^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = 0$$

ii)

$$1 + z_1 + {z_1}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^2 = -1 - z_1$$

$${z_1}^3 = z_1^2\, z_1 = (-1 - z_1)\, z_1 = -z_1 - z_1^2 = -z_1 - (-1 - z_1) = -z_1 + 1 + z_1 = 1$$

iii)

$$z_2^2 = (1 + z_1)^2 = 1 + 2z_1 + z_1^2 = 1 + 2z_1 - 1 - z_1 = z_1$$

Άρα $(z_2^2)^{\nu} = z_1^{\nu} \quad \Rightarrow \quad {z_2}^{2\nu} = {z_1}^{\nu}$

18.

Για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ δίνεται ότι $z_1^2 + z_2^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $z_1^{10} + z_2^{10} = 0$

ii) Να βρείτε το μικρότερο $\nu \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίο ισχύει $z_1^\nu = z_2^\nu$

Προτεινόμενη λύση

$$z_1^2 + z_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^2 = -z_2^2$$

$$\frac{z_1^2}{z_2^2} = -1$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = -1 \qquad \textbf{(1)}$$

i)

Αρκεί να δειχθεί ότι $z_1^{10} = -z_2^{10}$

$$\frac{z_1^{10}}{z_2^{10}} = -1$$

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{10} = -1$, που ισχύει από την (1), υψώνοντας στην 5^η

ii)

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \pm i$$

Θέλουμε να είναι $z_1^\nu = z_2^\nu$

$$\frac{z_1^\nu}{z_2^\nu} = 1$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\nu = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\pm i)^\nu = 1$$

Άρα ο μικρότερος $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι ο 4, αφού για $\nu = 1, 2, 3$ δεν επαληθεύεται .