ΜΑΘΗΜΑ 2
2.2 Συζυγείς μιγαδικοί
Θεωρία - Σχόλια – Μέθοδοι - Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ορισμός
Αν $z = \alpha + \beta i$ τότε $\overline{z} = \alpha - \beta i$

2.
Οι εικόνες των συζυγών
είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

3.
Πολύ χρήσιμες ισότητες

Αν $z = \alpha + \beta i$ τότε

i) $z + \overline{z} = 2\alpha = 2\,\mathrm{Re}(z)$ οπότε $\alpha = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

ii) $z - \overline{z} = 2\beta i = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i$ οπότε $\beta = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

4.
Οι πράξεις

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$\overline{\left(z^{\nu}\right)} = \left(\overline{z}\right)^{\nu} = \overline{z}^{\nu}$

5.

Η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ στο $\mathbb{C}$, με α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$

Όταν $\Delta>0$ τότε $z=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ δύο **πραγματικές** ρίζες

Όταν $\Delta=0$ τότε $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ μία διπλή **πραγματική** ρίζα

Όταν $\Delta<0$ τότε $z=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ δύο **συζυγείς καθαρά μιγαδικές** ρίζες

6.

Τύποι Vieta

$z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Ισχύουν οι ισότητες

$\overline{\overline{z}}=z$

$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

$z\overline{z}=\alpha^2+\beta^2=\left[\operatorname{Re}(z)\right]^2+\left[\operatorname{Im}(z)\right]^2$ **Απόδειξη :**

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)\\ &= \alpha^2-\beta^2 i^2\\ &= \alpha^2+\beta^2 \end{aligned}$$

2.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$z_1=z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\overline{z_2}$

$z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ **Απόδειξη :** Έστω $z=\alpha+\beta i$

$$\begin{aligned} z=\overline{z} \Leftrightarrow\ & \alpha+\beta i=\alpha-\beta i\\ & 2\beta i=0\\ & \beta=0\\ & z=\alpha\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

$z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in I$ **Απόδειξη.** Έστω $z=\alpha+\beta i$

$$\begin{aligned} z=-\overline{z} \Leftrightarrow\ & \alpha+\beta i=-(\alpha-\beta i)\\ & \alpha+\beta i=-\alpha+\beta i\\ & 2\alpha=0\\ & \alpha=0\\ & z=\beta i\in I \end{aligned}$$

3.
Εξισώσεις $3^{ου}$, $4^{ου}$ κ.λ.π βαθμού
Για εξισώσεις $3^{ου}$, $4^{ου}$ κ.λ.π βαθμού, μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιούμε.
Η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνει και με Σχήμα Horner.

4.
Ο συζυγής του i
$\overline{i} = -i$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.
Για κάποιο μιγαδικό z δίνεται ότι $5z+10\overline{z}=205$. Αποδείξτε ότι $z\in\mathbb{R}$.
Προτεινόμενη λύση

$5z+10\overline{z} = 205$ **(1)** $\Rightarrow$ $\overline{5z+10\overline{z}} = \overline{205} = 205$

$5\overline{z} + 10z = 205$ **(2)**

(1) , (2) $\Rightarrow$ $5z+10\overline{z} = 5\overline{z} + 10z$

$5\overline{z} = 5z$

$\overline{z} = z \Rightarrow z\in\mathbb{R}$

$\boxed{z = \overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}}$

2.
Για κάποιο μιγαδικό z δίνεται ότι $\alpha z+\beta\overline{z}=\gamma$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\beta\neq 0$ και $\alpha-\beta\neq 0$. Αποδείξτε ότι $z\in\mathbb{R}$.
Υπόδειξη
Ακολούθησε την άσκηση 1

3.
Για τους z_1 , $z_2\in\mathbb{C}$ δίνεται ότι $2009\,z_1\overline{z}_2+2010\overline{z}_1 z_2=2011$. Αποδείξτε ότι $z_1\overline{z}_2\in\mathbb{R}$.
Υπόδειξη
Θέτουμε $z_1\overline{z}_2 = z \Rightarrow \overline{z_1\overline{z}_2} = \overline{z} \Rightarrow \overline{z}_1 z_2 = \overline{z}$

$\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$

Ακολούθησε την άσκηση 1

4.
Για τον $z\in\mathbb{C}$ δίνεται ότι $3z^{2009}+2009\overline{z}^{2009}=2010$. Να αποδείξετε ότι $z^{2009}\in\mathbb{R}$.
Υπόδειξη
Θέτουμε $z^{2009} = w \Rightarrow \overline{z}^{2009} = \overline{w}$
Ακολούθησε την άσκηση 1

$\boxed{\overline{\left(z^{\nu}\right)} = \overline{z}^{\nu}}$

5.

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι ο $w = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$ είναι φανταστικός και ο $u = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ είναι πραγματικός.

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\bar{w} = -w$

$$\overline{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2} = -(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)$$

$$\overline{z_1\bar{z}_2} - \overline{\bar{z}_1 z_2} = -z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

$$\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 = -z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$ που ισχύει

Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\bar{u} = u$ ομοίως

6.

Έστω $u, w \in \mathbb{C}$, με $w \neq 0$. Αν $\overline{\left(\dfrac{w}{\bar{w}}\right)} = 1 + \dfrac{u}{w}$, να αποδείξετε ότι ο u είναι φανταστικός.

Προτεινόμενη λύση

$\dfrac{\bar{w}}{w} = 1 + \dfrac{u}{w} \Rightarrow \bar{w} = w + u \Rightarrow u = \bar{w} - w$ **(1)**

$\bar{u} = \overline{\bar{w} - w} = w - \bar{w}$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow u = -\bar{u} \Rightarrow u$ φανταστικός.

7.

Έστω $z = (3-i)^{10} + (8+6i)^5$. Αποδείξτε ότι $z \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} z &= \left[(3-i)^2\right]^5 + (8+6i)^5 = (9-6i-1)^5 + (8+6i)^5 \\ &= (8-6i)^5 + (8+6i)^5 \\ &= (8-6i)^5 + \overline{(8-6i)^5} \\ &= 2\mathrm{Re}(8-6i)^5 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

8.

Έστω $z = \left(2+\sqrt{2}\,i\right)^{20} + \left(2-4\sqrt{2}\,i\right)^{10}$. Αποδείξτε ότι $z \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 7

9.

Δίνεται ο μιγαδικός $\alpha \neq 0$ και ο πραγματικός β. Τυχαίος $z \in \mathbb{C}$ επαληθεύει την ισότητα $\bar{\alpha} z + \bar{z} \alpha + \beta = 0$ Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε ευθεία.

Προτεινόμενη λύση

$$\bar{\alpha} z + \bar{z} \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \overline{\bar{\alpha} z + \bar{z}\alpha + \beta} = 0$$

$$\bar{\alpha} z + \overline{\bar{z} \alpha} + \beta = 0$$

$$\bar{\alpha} z + \overline{\bar{\alpha} z} + \beta = 0$$

$$2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} z) + \beta = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \bar{z}_2}$$

$$\boxed{z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)}$$

Θέτουμε $\alpha = \kappa + \lambda i \neq 0$ και $z = x + yi$

Οπότε $\bar{\alpha} z = (\kappa - \lambda i)\,(x + yi) = (\kappa x + \lambda y) + (\kappa y - \lambda x)i$

$(1) \Rightarrow 2(\kappa x + \lambda y) + \beta = 0 \Rightarrow 2\kappa x + 2\lambda y + \beta = 0$ που παριστάνει ευθεία

10.

Για τους μιγαδικούς $z\,,\,w$ δίνεται ότι $z = w + \dfrac{1}{w}$, όπου $w \neq 0$. Αν $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$, να αποδείξετε ότι, η εικόνα του z ανήκει σε υπερβολή.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $w = \lambda + \lambda i = \lambda(1 + i)$ με $\lambda \neq 0$

Τότε

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{1+i}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-i}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-i}{2} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} i$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Όταν αναφερθεί γραμμή}\\ \text{της αναλυτικής γεωμετρίας ,}\\ \text{υποψιαζόμαστε συντεταγμένες}\end{array}}$$

Έστω $z = x + yi$

Η ισότητα $z = w + \dfrac{1}{w} \Rightarrow x + yi = \lambda + \lambda i + \dfrac{1}{2\lambda} - \dfrac{1}{2\lambda} i$

$$x = \lambda + \frac{1}{2\lambda} \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad y = \lambda - \frac{1}{2\lambda} \quad \textbf{(2)}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x + y = 2\lambda$ **(3)**

$(1) - (2) \Rightarrow x - y = 2\dfrac{1}{2\lambda}$ **(4)**

$(3).\,(4) \Rightarrow x^2 - y^2 = 2$ που είναι υπερβολή.

11.

Για τους μιγαδικούς z, w δίνεται ότι $\overline{w} = \dfrac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}$. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$\mathrm{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) < 0$

Προτεινόμενη λύση

$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

Είναι $\mathrm{Im}(w) = \dfrac{1}{2i}(w - \overline{w})$

Η υπόθεση $\overline{w} = \dfrac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}} \Rightarrow w = \dfrac{1-z}{1+z}$

$$\mathrm{Im}(w) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(w - \overline{w}) < 0$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1-z}{1+z} - \frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}\right) < 0$$

$$\frac{1}{2i}\,\frac{(1-z)(1+\overline{z}) - (1-\overline{z})(1+z)}{(1+z)(1+\overline{z})} < 0$$

$$\frac{1}{2i}\,\frac{1+\overline{z}-z-z\overline{z}-1-z+\overline{z}+z\overline{z}}{(1+z)(1+\overline{z})} < 0$$

$$\frac{1}{2i}\,\frac{-2(z-\overline{z})}{(1+z)\left(\overline{1+z}\right)} < 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω $1 + z = \alpha + \beta i$, τότε $(1+z)\left(\overline{1+z}\right) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2i}[-2(z - \overline{z})] < 0$$

$$-\frac{1}{i}\,2i\,\mathrm{Im}(z) < 0$$

$$\mathrm{Im}(z) > 0$$

12.

Για τους μιγαδικούς z, w δίνεται ότι $w\overline{w} + z\overline{z} = w^2 + z^2$. Να δείξετε ότι $w, z \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Αν δεν έχουμε άλλη επιλογή, χρησιμοποιούμε συντεταγμένες

Έστω $w = \kappa + \lambda i$ και $z = x + yi$

$w\overline{w} + z\overline{z} = w^2 + z^2 \Rightarrow$

$(\kappa + \lambda i)(\kappa - \lambda i) + (x + yi)(x - yi) = (\kappa + \lambda i)^2 + (x + yi)^2$

$\kappa^2 + \lambda^2 + x^2 + y^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda i - \lambda^2 + x^2 + 2xyi - y^2$

$\kappa^2 + \lambda^2 + x^2 + y^2 = \kappa^2 - \lambda^2 + x^2 - y^2$ και $0 = 2\kappa\lambda i + 2xyi$

$2\lambda^2 + 2y^2 = 0$

$\lambda^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ και $y = 0$

Άρα $w = \kappa \in \mathbb{R}$ και $z = x \in \mathbb{R}$

13.

Έστω μιγαδικός $z \neq 1$ και $f(z)=\dfrac{2z-i\bar{z}}{z-1}$. Να βρείτε τον $\left[f(1-i)\right]^{2008}$

Προτεινόμενη λύση

$$f(1-i)=\frac{2(1-i)-i(1+i)}{1-i-1}=\frac{2-2i-i+1}{-i}=\frac{3-3i}{-i}=3\,\frac{(1-i)i}{-i.i}=3(i+1)$$

$$\left[f(1-i)\right]^2 = [3(i+1)]^2 = 3^2\,(-1+2i+1) = 3^2\,2i$$

$$\left[f(1-i)\right]^4 = (3^2\,2i)^2 = 3^4\,2^2\,(-1)$$

$$\left[f(1-i)\right]^{2008} = [3^4\,2^2\,(-1)]^{502} = 3^{2008}\,2^{1004}$$

Αν δεν έχουμε άλλη επιλογή, χρησιμοποιούμε συντεταγμένες

14.

Έστω $z=x+yi$ με $x, y\in\mathbb{R}$ και $z^{2003}\in\mathbb{R}^*$. Αν $w=(y+xi)^{2003}$, να αποδείξετε ότι ο w^2 είναι αρνητικός.

Προτεινόμενη λύση

Επειδή $z^{2003}\in\mathbb{R}^*$ θα είναι $z^{2003}=\lambda\in\mathbb{R}^*$

Είναι $y+xi = -i^2y+xi = i(x-yi) = i\bar{z}$

$$w=(y+xi)^{2003} = (i\bar{z})^{2003} = i^{2003}\,.\,\bar{z}^{2003} = -i\,\overline{z^{2003}} = -i\,\bar{\lambda} = -i\lambda$$

$$w^2 = (-i\lambda)^2 = -\lambda^2 < 0$$

15.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με τις ιδιότητες:

α) $f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2)$ για κάθε $z_1\,,\,z_2\in\mathbb{C}$

β) $f(z_1z_2)=f(z_1)f(z_2)$ για κάθε $z_1\,,\,z_2\in\mathbb{C}$

γ) $f(\alpha)=\alpha$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: **i)** $f(i)=i$ ή $f(i)=-i$

ii) $f(z)=z$ ή $f(z)=\overline{z}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f(i^2)=f(i\cdot i)\overset{\text{ii}}{=}f(i)\,f(i)=[\,f(i)\,]^2$$

$$f(i^2)=f(-1)\overset{\text{iii}}{=}-1$$

Άρα $[\,f(i)\,]^2=-1 \;\Rightarrow\; f(i)=i$ ή $f(i)=-i$

ii)

Έστω $z=x+y\,i$

$$f(z)=f(x+yi)\overset{\text{i}}{=}f(x)+f(yi)=x+f(y)\,f(i)=x+y\,f(i)$$

$$\overset{(\alpha)}{=}x+yi \;\text{ ή }\; x+y(-i)=x+yi \;\text{ ή }\; x-yi=z \;\text{ ή }\; \overline{z}$$