5^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

41 .

i) Να βρεθούν 4 αριθμοί οι οποίοι αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν το άθροισμα τους είναι 22 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 166

ii) Αν ο μικρότερος από τους παραπάνω αριθμούς είναι ο πρώτος όρος της προόδου, και ω > 0, να βρείτε πόσους το πολύ πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε ώστε το άθροισμά τους να μην υπερβαίνει το 3725

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $x-\theta$ και $x+\theta$ οι δύο μεσαίοι αριθμοί τότε

η τετράδα των αριθμών θα είναι

$x-3\theta,\quad x-\theta,\quad x+\theta,\quad x+3\theta\quad$ με $\omega = 2\theta$

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$x-3\theta + x-\theta + x+\theta + x+2\theta = 22 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{2}$ και

$(x-3\theta)^2 + (x-\theta)^2 + (x+\theta)^2 + (x+2\theta)^2 = 166 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 10\theta^2 = 83$

και με αντικατάσταση του x από το ίσο του βρίσκουμε $\theta = \pm\dfrac{3}{2}$ οπότε αν

$\theta = \dfrac{3}{2}$ οι αριθμοί είναι οι 1, 4 , 7 , 10

αν $\theta = -\dfrac{3}{2}$ οι αριθμοί είναι οι ίδιοι με αντίθετη σειρά

ii)

Έστω $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 3$.

Αν ν είναι το πλήθος των πρώτων όρων τότε θα πρέπει

$$S_\nu \le 3725 \Leftrightarrow \frac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2} \le 3725 \Leftrightarrow$$

$$\frac{[2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 3]\nu}{2} \le 3725 \Leftrightarrow$$

$$3\nu^2 - \nu - 7450 \le 0 \ \textbf{(1)}$$

$$3\nu^2 - \nu - 7450 = 0 \Leftrightarrow \nu = 50 \text{ ή } \nu = -\frac{149}{3}$$

Και επειδή ν θετικός ακέραιος η **(1)** $\Leftrightarrow 0 < \nu \le 50$

Επομένως το πολύ 50 πρώτους όρους μπορούμε να πάρουμε

42 .

Το 50% των κατοίκων μίας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα (α) , ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα (α) και δεν διαβάζουν την εφημερίδα (β) .

i) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται στην τύχη, να μην διαβάζει την εφημερίδα (α) ή να διαβάζει την εφημερίδα (β)

ii) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

Β: ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία διαβάζει την εφημερίδα (β) .

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα α

Β: ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα β

Τότε $A - B$ είναι το ενδεχόμενο :

‘΄ Ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα α και δεν διαβάζει την β’’.

Δίνεται ότι

$P(A) = 50\ \%$, $P(A-B) = 30\%$

Το ενδεχόμενο : ΄΄Ο κάτοικος δεν διαβάζει την α ή διαβάζει την β’’

είναι το $A' \cup B$.

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) =$$
$$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) =$$
$$= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] =$$
$$= 1 - P(A-B) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{7}{10} = 70\%$$

ii)

Είναι προφανές ότι

$B \subseteq B \cup A' \Rightarrow P(B) \le P(B \cup A') \Rightarrow$

$P(B) \le \frac{7}{10}$.

$P(A-B) = 30\% \quad \Leftrightarrow$

$P(A) - P(A \cap B) = 30\% \quad \Leftrightarrow$

$50\% - P(A \cap B) = 30\% \quad \Leftrightarrow$

$P(A \cap B) = 20\%$.

Όμως $A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(B) \Rightarrow$

$\frac{20}{100} \le P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le P(B)$ δηλαδή $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$.

43.

Έστω η εξίσωση $(\lambda-\mu)x + 2x = \lambda - (\lambda+2)x + \mu x + 5\mu + 8$

i) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ έτσι ώστε η εξίσωση να έχει άπειρες λύσεις

ii) Για $\lambda = -3$ και $\mu = -1$

α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \mu, & \text{αν } |x| \le 1 \\ -2x - \lambda, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

β) Αν $A(-1, f(-1))$ και $B(3, f(3))$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει η ΑΒ με τον άξονα των x

Προτεινόμενη λύση

i)

$(\lambda-\mu)x + 2x = \lambda - (\lambda+2)x + \mu x + 5\mu + 8 \Leftrightarrow$ πράξεις $\Leftrightarrow$

$(2\lambda - 2\mu + 4)x = \lambda + 5\mu + 8$ η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις όταν

$$\begin{cases} 2\lambda - 2\mu + 4 = 0 \\ \lambda + 5\mu + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ και } \mu = -1$$

ii)

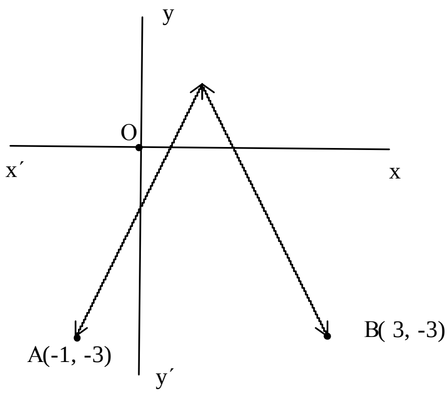
α) Για $\lambda = -3$ και $\mu = -1$ ο τύπος της f γίνεται

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } -1 \le x \le 1 \\ -2x + 3, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

Για τους κλάδους $f(x) = 2x - 1$ και $f(x) = -2x + 3$ με την βοήθεια των παρακάτω πινάκων τιμών

x	−1	1
f(x)	−3	1

x	1	3
f(x)	1	−3



σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της f η οποία φαίνεται στο διπλανό σχήμα

β) επειδή τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη $y = -3$ η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση την $y = -3$ η οποία είναι // στον άξονα των x και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των x είναι $\omega = 0^o$.

44.

i) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$\begin{cases} 2x+6\geq 0 \\ x^2+3x+2\geq 0 \\ 25-x^2\leq 0 \end{cases}$$

ii) Να βρείτε τις τιμές του x έτσι ώστε να ορίζεται η παράσταση

$A=\sqrt{2x+6}+\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-25}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά

- $2x+6\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -6 \Leftrightarrow x\geq -3$
- $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=-1$

το πρόσημο του τριώνυμου x^2+3x+2 φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad +\infty$
Πρόσημο του x^2+3x+2	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

Η ανίσωση $x^2+3x+2\geq 0$ αληθεύει όταν $x\leq -2$ ή $x\geq -1$

- $25-x^2=0 \Leftrightarrow x=-5$ ή $x=5$

το πρόσημο του τριώνυμου $25-x^2$ φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$ $\quad -5 \quad 5 \quad +\infty$
Πρόσημο του $25-x^2$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

Η ανίσωση $25-x^2\leq 0$ αληθεύει όταν $x\leq -5$ ή $x\geq 5$

η συναλήθευση των ανισώσεων φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	-5	-3	-2	-1	5	$+\infty$
A							
B							
Γ							

από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x\geq 5$

ii)

Θα πρέπει να ισχύει

$2x + 6 \geq 0$ και $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ και $x^2 - 25 \geq 0$ ή $25 - x^2 \leq 0$

Πράγμα που ισχύει με βάση το **(i)** όταν $x \geq 5$

45.

i) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x^2 - x-2<0 \end{cases}$$

ii) Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε η ανίσωση

$(-\mu-2)x^2-2(\mu-2)x + 3(\mu-2) < 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά

$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$x^2 - x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$

Το πρόσημο του $x^2 + 3x - 6$ φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 2 $\quad +\infty$
Πρόσημο του $x^2 - x-2$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

Η ανίσωση $x^2 - x-2 < 0$ αληθεύει όταν $-1 < x < 2$

η συναλήθευση των ανισώσεων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	2 $\quad +\infty$
A				
B				

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν

$-1 < x < 2$

ii)

Η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι

$\Delta = 4(\mu-2)^2 + 12(\mu + 2)(\mu-2) = 16(\mu^2-\mu-2)$

Για να αληθεύει η ανίσωση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα πρέπει

$(\Delta < 0$ και $-\mu - 2 < 0) \Leftrightarrow (\mu^2-\mu-2 < 0$ και $\mu + 2 > 0)$

Πράγμα που συμβαίνει με βάσει το **(i)** όταν $-1 < \mu < 2$

46.

Έστω $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, 10\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα .

Για τα ενδεχόμενα A , B, Γ του Ω είναι

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A \cap B = \{1,\ 3,\ 4\}$, $A - B = \{2,\ 6\}$

και $\Gamma = \{x \in \Omega /\ \dfrac{x+1}{x-1} \geq 2\ \}$

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$

ii) Να βρείτε την πιθανότητα ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ.

iii) Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα B και Γ

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $A \cap B = \{1,\ 3,\ 4\}$ και $A - B = \{2,\ 6\}$ θα είναι

$A = \{1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 6\}$

Επίσης

Αφού

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A = \{1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 6\}$, $A \cap B = \{1,\ 3,\ 4\}$

Το B θα είναι το

$B = \{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

Για το ενδεχόμενο Γ έχουμε

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1-2x+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$(3-x)(x-1) \geq 0$ και $x \neq 1$ $\Leftrightarrow$

$1 < x \leq 3$ και επειδή $x \in \Omega$ θα είναι

$x = 2$ ή $x = 3$ άρα

$\Gamma = \{2,\ 3\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{10}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \text{ και } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10}$$

ii)

$B - \Gamma = \{1,\ 4,\ 5\}$ άρα $P(B - \Gamma) = \dfrac{N(B-\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$

iii)

$\Gamma - B = \{2\}$ οπότε $(B - \Gamma) \cup (\Gamma - B) = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ άρα

$$P[(B-\Gamma) \cup (\Gamma - B)] = \frac{4}{10}$$

47.

Η τιμή αγοράς ενός υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 € και μικρότερη από 640 €

- Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής
- Να δοθεί προκαταβολή 120 €
- Η εξόφληση του υπολοίπου να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω € , όπου ω θετικός ακέραιος
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 €

i) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω

ii) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω

iii) Να βρείτε την τιμή του ω

iv) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης

v) Να βρείτε την τιμή αγοράς του υπολογιστή

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι φανερό ότι οι δόσεις εξόφλησης αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω

Οπότε αν α_1 είναι η πρώτη δόση, τότε , αφού η τέταρτη δόση είναι 48 € έχουμε

$\alpha_4 = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 = 48 - 3\omega$ **(1)**

ii)

Το ποσό που θα εξοφληθεί με δόσεις είναι ίσο με το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με πρώτον όρο α_1 και διαφορά ω

Αυτό το ποσό είναι

$$S_{10} = \frac{[2\alpha_1 + 9\omega]10}{2} =$$

$=10\alpha_1 + 45\omega$ και λόγω της **(1)**

$S_{10} = 10(48 - 3\omega) + 45\omega = 480 + 15\omega$

Αν x είναι η αξία του υπολογιστή τότε

$x = 120 + 480 + 15\omega = 600 + 15\omega$ **(2)**

iii)

Επειδή $620 < x < 640$ και λόγω της **(2)**

$620 < 600 + 15\omega < 640 \Leftrightarrow$

$20 < 15\omega < 40 \Leftrightarrow$

$\frac{4}{3} < \omega < \frac{8}{3}$ και επειδή ω θετικός ακέραιος θα είναι $\omega = 2$

iv)

Η τελευταία δόση είναι ίση με

$\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 48 - 3\omega + 9\omega = 48 + 6\omega = 48 + 12 = 60$ €

v)

Η αξία του υπολογιστή είναι $x = 600 + 15\omega = 600 + 30 = 630$ €

48 .

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 - 4(\lambda + 6)x + 4\lambda + 29$

i) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η γραφική της παράσταση να τέμνει τον άξονα των x σε δύο διαφορετικά σημεία

ii) Αν η κορυφή της γραφικής παράστασης έχει τετμημένη 5 να βρείτε την τιμή του λ

iii) Για $\lambda = 4$ να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα πρέπει να ισχύει

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16(\lambda + 6)^2 - 16(4\lambda + 29) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 7 > 0 \Leftrightarrow$ (γνωστή διαδικασία)

$$\lambda < -7 \text{ ή } \lambda > -1$$

ii)

Όπως είναι γνωστό η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και η τετμημένη της κορυφής της παραβολής είναι ίση με $-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\lambda + 6}{2}$ οπότε

$\frac{\lambda + 6}{2} = 5 \Leftrightarrow \lambda = 4$

iii)

Η συνάρτηση είναι

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty\ ,\ 5]$ και

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[5\ ,+\ \infty)$

παρουσιάζει για $x = 5$ ελάχιστο ίσο με $f(5) = -55$

49.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού

ii) Αν $x \neq 1$ και $x \neq 2$ δείξτε ότι $f(x) = \dfrac{2x+7}{x-2}$

iii) Να λυθεί η εξίσωση $|f(x)| \leq 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει να ισχύει $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots x \neq 1$ και $x \neq 2$ επομένως

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{1,\ 2\}$

ii)

Αναλύοντας σε γινόμενο με τον γνωστό τρόπο κάθε ένα από τα τριώνυμα του κλάσματος βρίσκουμε ότι

$2x^2 + 5x - 7 = (x-1)(2x+7)$ και $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ οπότε

$f(x) = \dfrac{(x-1)(2x+7)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{2x+7}{x-2}$ με $x \neq 1$ και $x \neq 2$

iii)

Με $x \neq 1$ και $x \neq 2$ έχουμε

$|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{2x+7}{x-2} \leq 1$

Επομένως έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$-1 \leq \dfrac{2x+7}{x-2}$ και $\dfrac{2x+7}{x-2} \leq 1$

- $-1 \leq \dfrac{2x+7}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{2x+7}{x-2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+7}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{3x+5}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (3x+5)(x-2) \geq 0 \ldots\ldots \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{3}$ ή $x > 2$ **(1)** λόγω των περιορισμών

- $\dfrac{2x+7}{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow \ldots \dfrac{x+9}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x+9)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq x < 2$ και $x \neq 1$ **(2)**

Συναληθεύοντας κατά τα γνωστά τις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε $-9 \leq x \leq -\dfrac{5}{3}$

50.

Έστω η εξίσωση $x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2 - 1 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι ίσες

iii) Όταν οι ρίζες είναι άνισες να προσδιορίσετε τις τιμές του λ έτσι ώστε για τις ρίζες x_1 και x_2 να ισχύει η σχέση $|x_1 + x_2 + x_1x_2 + 3| = 5\lambda - 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\Delta = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ άρα

η εξίσωση έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii)

Θα πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\sqrt{2}$ ή $\lambda = \sqrt{2}$

iii)

Με $\lambda \neq -\sqrt{2}$ και $\lambda \neq \sqrt{2}$

επειδή $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda^2$ και $x_1x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lambda^2 - 1$ έχουμε

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2 + 3| = 5\lambda - 1 \Leftrightarrow |2\lambda^2 + 2| = 5\lambda - 1 \overset{2\lambda^2+2>0}{\Leftrightarrow}$$

$$2\lambda^2 + 2 = 5\lambda - 1 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \frac{3}{2}$$