

## Ερωτήσεις κατανόησης σελίδων 354 - 359

### I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1.

$$\text{Ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

**Αιτιολογία**

Βασική ιδιότητα

A

Ψ

2

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) \cdot g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

**Αιτιολογία**

Ένα αντιπαράδειγμα :

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = 1$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) \cdot g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1dx = [x]_{\alpha}^{\beta} = \beta - \alpha$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1dx \int_{\alpha}^{\beta} 1dx = (\beta - \alpha)(\beta - \alpha)$$

A

Ψ

3.

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$$

**Αιτιολογία**

Βασική ιδιότητα

A

Ψ

4.

$$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0, \text{ τότε κατ' ανάγκην θα είναι } f(x) = 0$$

για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$

**Αιτιολογία**

Ένα αντιπαράδειγμα :

$$\int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^{2\pi} = -\sigma \nu 2\pi + \sigma \nu 0 = 0$$

Αλλά δεν είναι  $\eta \mu x = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$

A

Ψ

5.

Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$

A

Ψ

**Αιτιολογία**

Βασική ιδιότητα

6.

Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$

A

Ψ

για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$

**Αιτιολογία**

Ένα αντιπαράδειγμα :

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\sigma \nu \frac{3\pi}{2} + \sigma \nu 0 = 0 + 1 = 1 > 0$$

Αλλά  $\eta \mu x < 0$  όταν  $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

7.

$\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1) dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1) dx$  για κάθε  $\alpha > 0$

A

Ψ

**Αιτιολογία**

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1) dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1) dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} [(x^4 + x^2 + 1) - (x^4 + 1)] dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1 - x^4 - 1) dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx > 0 \text{ από θεώρημα.} \end{aligned}$$

8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta \mu^2 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma \nu x) dx$$

A

Ψ

**Αιτιολογία**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta \mu^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma \nu^2 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma \nu x) dx$$

\* Είναι  $\sigma \nu x > 0$  για κάθε  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

9.

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx$$

A

Ψ

**Αιτιολογία**

Παραγοντική ολοκλήρωση

**10.**

$$\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$$

A

Ψ

**Αιτιολογία**

$$\int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt = \int_e^1 \ln t^{-1} dt = - \int_e^1 \ln t dt = \int_1^e \ln t dt = \int_1^e \ln x dx$$

**11.**

Εκτός ύλης

**12.**

Εκτός ύλης

**13.**

Αν  $\int_a^b f(x) dx = 0$  και η  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο  $[a, b]$  τότε η  $f$  παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές

A

Ψ

**Αιτιολογία**

Αν ήταν  $f(x) \geq 0$  ή  $f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$  τότε θα είχαμε

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad \text{ή} \quad \int_a^b f(x) dx < 0 \quad \text{αντίστοιχα.}$$

**14.**

Το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$  παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των  $x$  και την  $C_f$ .

A

Ψ

**Αιτιολογία**

Για να παριστάνει το εμβαδόν θα έπρεπε να είναι

$$x^3 - x \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [-1, 1], \quad \text{που δεν ισχύει.}$$

## II

Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε την σωστή απάντηση

**1.**

Αν  $f'(x) = \eta\mu\pi x$  και  $f(0) = 0$ , τότε το  $f(1)$  ισούται με

- A.  $-\frac{1}{\pi}$       B.  $\frac{1}{\pi}$       Γ.  $-\frac{2}{\pi}$       ☒ Δ.  $\frac{2}{\pi}$

**2.**

Το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{4-x} dx$  στο  $(4, +\infty)$  είναι ίσο με

- A.  $\ln(4-x) + c$       B.  $-\ln(4-x) + c$   
 Γ.  $\ln(x-4) + c$       ☒ Δ.  $-\ln(x-4) + c$

**3.**

Το ολοκλήρωμα  $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$  στο  $(0, +\infty)$  είναι ίσο με

- A.  $\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} + c$       B.  $2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$   
 Γ.  $\frac{(1 - \ln x)^3}{3} + c$       ☒ Δ.  $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c$

E.  $\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c$

**4.**

Το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx$  είναι ίσο με

- ☒ A.  $\frac{4}{3}$       B. 0      Γ.  $-\frac{4}{3}$       Δ.  $\frac{2}{3}$       E.  $\frac{5}{3}$

5.

Το ολοκλήρωμα  $\int \ln x dx$  είναι ίσο με

A.  $\frac{1}{x} + c$     B.  $\frac{\ln^2 x}{2} + c$     **Γ.  $x(\ln x - 1) + c$**     Δ.  $\frac{\ln^3 x}{3} + c$

6.

Έστω  $f, g$  δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο  $[a, \beta]$ .

Αν  $f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

A.  $f'(x) \leq g'(x), x \in [a, \beta]$     **B.  $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$**

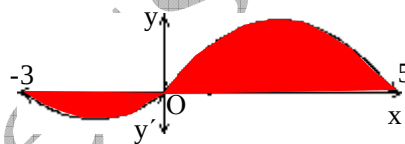
Γ.  $\int f(x) dx \leq \int g(x) dx, x \in [a, \beta]$     Δ.  $\int_\beta^a f(x) dx \leq \int_\beta^a g(x) dx$

7.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με

A.  $\int_{-3}^5 f(x) dx$     B.  $\int_5^{-3} f(x) dx$

Γ.  $\int_{-3}^0 f(x) dx - \int_0^5 f(x) dx$     **Δ.  $-\int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$**



8.

Αν  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$  και  $f(0) = g(0) + 2$ , τότε για κάθε  $x \in [-1, 1]$  ισχύει:

A.  $f(x) = g(x) - 2$     **B.  $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = 4$**

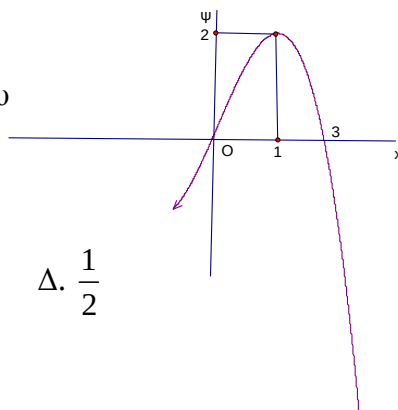
Γ.  $f(x) \leq g(x), x \in [-1, 1]$     Δ. Οι  $C_f, C_g$  έχουν κοινό σημείο στο  $[-1, 1]$

9.

Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

Τότε η  $F'(1)$  είναι ίση με

A. 0    B. 1    **Γ. 2**    Δ.  $\frac{1}{2}$



**10.**

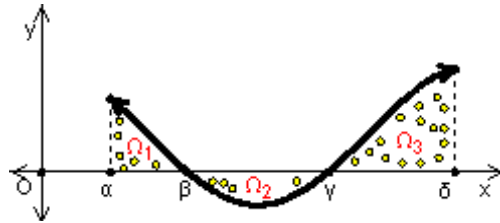
Έστω  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

Αν  $E(\Omega_1) = 2$ ,  $E(\Omega_2) = 1$  και  $E(\Omega_3) = 3$

τότε το  $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$  ισούται με

A. 6      B. -4      **Γ. 4**

Δ. 0      E. 2

**11.**

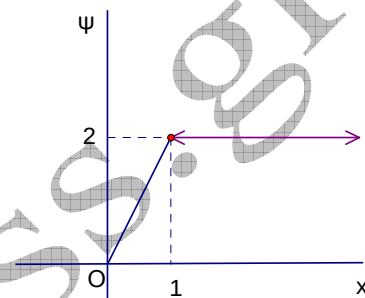
Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε

A.  $F(x) = x^2$

B.  $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Γ.  $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \end{cases}$

**Δ.  $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & 1 \leq x \end{cases}$**



### III

**1.**

Εκτός ύλης

**2.**

Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένα ;

A.  $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$

**B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx$**

Γ.  $\int_0^{\pi} \epsilon \phi x dx$

Δ.  $\int_0^1 \ln x dx$

E.  $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx$

**Z.  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$**

**3.**

Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} dx &= \int x' \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 1 + \int \frac{1}{x} dx\end{aligned}\quad \text{Άρα } \int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx, \text{ οπότε } 0 = 1$$

**Απάντηση**

Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα είναι σύνολο συναρτήσεων και όχι μια συνάρτηση.

Στην τελευταία ισότητα, διαγράφεται το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{x} dx$  του 1<sup>ου</sup> μέλους με το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{x} dx$  του 2<sup>ου</sup> μέλους που δεν είναι ίσα, αλλά διαφέρουν κατά σταθερά.

Συγκεκριμένα, αν  $F(x)$  είναι μία αρχική της  $f(x)$ , τότε το συμπέρασμα γράφεται

$$F(x) + c_1 = 1 + F(x) + c_2 \Leftrightarrow c_1 - c_2 = 1 \text{ και όχι } 0 = 1$$

**4.**

Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \left( -\frac{1}{u^2} \right) du \\ &= -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I \quad \left( \text{Θέσαμε } \frac{1}{u} = x \text{ οπότε } dx = -\frac{1}{u^2} du \right)\end{aligned}$$

Άρα  $I = -I$  οπότε  $I = 0$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0$$

επειδή  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$

**Απάντηση**

Η αντικατάσταση  $\frac{1}{u} = x$  δεν είναι σωστή διότι :

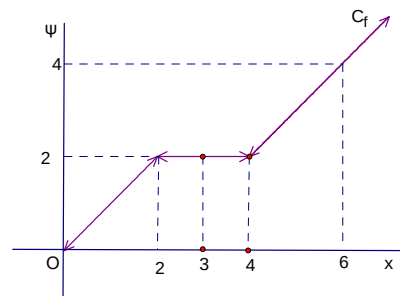
Όταν το  $x$  παίρνει την τιμή 0, δεν υπάρχει αντίστοιχο  $u$ , αφού  $x = \frac{1}{u}$

5.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά



$$F(0) = 0$$

$$F(2) = 2$$

$$F(3) = 4$$

$$F(4) = 6$$

$$F(6) = 12$$

netsuccess.gr