Ερωτήσεις κατανόησης σελίδων 295 - 299

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας .

1.
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$ Α Ψ

Αιτιολογία

Αν ήταν $f(0) = f(1)$, τότε από το Θ.Rolle στο $[0, 1]$, θα υπήρχε ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο.

2.
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) < 0$. Α Ψ

Αιτιολογία

Αν ήταν $f'(x_o) \geq 0$ για κάθε $x_o \in (\alpha, \beta)$, τότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, οπότε δεν θα μπορούσε να είναι $f(\beta) < f(\alpha)$

3.
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_o , f(x_o))$ και $B(x_o , g(x_o))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες . Α Ψ

Αιτιολογία

Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει το Θ. Rolle, οπότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h'(x_o) = 0 \Rightarrow$

$$f'(x_o) - g'(x_o) = 0$$

$$f'(x_o) = g'(x_o) .$$

Δηλαδή οι εφαπτόμενες στα Α και Β είναι παράλληλες.

4.
Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f — Α Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f — Α Ψ

Αιτιολογία

Οι ρίζες και το πρόσημο της f' φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f΄		–	0	–	0	+	
f		↘		↘		↗	

Βλέπουμε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 1, ενώ έχει τοπικό ελάχιστο στο 2

5.

α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη. — Α Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη — Α Ψ

Αιτιολογία

α) Η πρώτη παράγωγος θα είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, που ως γνωστόν έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, συνεπώς θα έχουμε μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

β) Η πρώτη παράγωγος θα είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, οπότε δεν είναι υποχρεωτικό να έχει πραγματικές ρίζες.

6.
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. — Α Ψ

Αιτιολογία

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι η $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, η οποία έχει πάντα μία τιμή μηδενισμού αφού $\alpha \neq 0$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο, άρα πάντα έχουμε ένα σημείο καμπής.

7.

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_o σημείο καμπής, τότε και η συνάρτηση $h = f\cdot g$ έχει στο x_o σημείο καμπής. Α Ψ

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα.

$f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$

Οι f'' και g'' μηδενίζονται στο $x_0 = 0$ και αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν αυτού, άρα παρουσιάζουν καμπή στο 0.

Αλλά $h(x) = x^8 \Rightarrow h'(x) = 8x^7$ και $h''(x) = 56x^6$

Οπότε η h'' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$, αλλά δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Άρα δεν παρουσιάζει καμπή στο 0.

8.

Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα των x . Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o , f(x_o))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα των x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε η εφαπτομένη σ' αυτό θα είναι οριζόντια. Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι φανερό ότι το σημείο Α θα βρίσκεται σε σχέση με τα υπόλοιπα ψηλότερα ή χαμηλότερα από τον άξονα των x οπότε η συνάρτηση θα έχει ακρότατο στο x_o και επειδή παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ σύμφωνα με το Θ.Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$, οπότε η εφαπτομένη οριζόντια

9.

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ Α Ψ

β) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ Α Ψ

Αιτιολογία

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$

άρα η $x = 1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

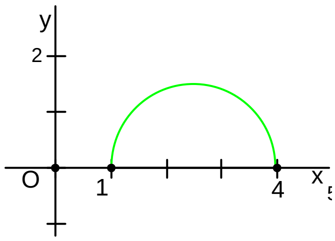
β) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} = +\infty$,

η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

10.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε



i) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,\ 4)$ Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,\ 4]$ Α Ψ

iii) $f\,'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ 4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_o \in (1,\ 4) :\ f\,'(x_o) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

i) Όπως φαίνεται από την γραφική παράσταση, υπάρχει σημείο $x_o \in (1,\ 4)$ το οποίο είναι ψηλότερα από όλα τα άλλα και στο οποίο η f παραγωγίζεται, άρα από Θ.Fermat θα είναι $f'(x_o) = 0$

ii) Ομοίως με το (i)

iii) Όχι, διότι η συνάρτηση είναι και γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ 4]$

iv) Η εξήγηση δίνεται στο (i)

11.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει

α) μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ Α Ψ

β) μία ακριβώς ρίζα στο $(-1,\ 0)$ Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

Αιτιολογία

α) Όχι επειδή όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί

β) Ισχύει Bolzano και είναι γνησίως αύξουσα, αφού $f\,'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

γ) Καλύπτεται από το (ii)

12.
Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν

$f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$,

τότε $(fog)'(0) = (gof)'(0)$ Α Ψ

Αιτιολογία

$(fog)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(5)\cdot 1 = 6$

$(gof)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(4)\cdot 3 = 6$

ΙΙ

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε την σωστή απάντηση .

1.

Το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+h)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Β. $\dfrac{4}{3}$ Γ. $\sqrt{3}$ Δ. $\dfrac{3}{4}$

2.

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με

Α. $\dfrac{1}{x^2}$ Β. $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ. $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ. $-\dfrac{2}{x}$ Ε. 0

3.
Αν $f(x) = 5^{3x}$, τότε η $f'(x)$ ισούται με

Α. $3x\cdot 5^{3x-1}$ Β. $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ. $3\cdot 5^{2x}$ Δ. $3\cdot 5^{3x}$ Ε. $5^{3x}\ln 125$

4.
Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(x+1)$, τότε η $f'(\pi)$ ισούται με

Α. $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Β. $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$ Γ. $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$

Δ. $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

5.
Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$, τότε η 7^η παράγωγος είναι

Α . 1 Β. -1 Γ 0 Δ.. 27 Ε. δεν υπάρχει

6.
Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_o είναι παράλληλες τότε το x_o είναι

Α. 0 Β. $\frac{1}{4}$ Γ $\frac{1}{2}$ Δ.1 Ε.2

7.

Αν $f(x) = e^{\beta x}$, $g(x) = e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με :

Α. $\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$ Β. $\frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$ Γ. $\frac{\alpha + 1}{\alpha^2}$

Δ. $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$ Ε $\frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$

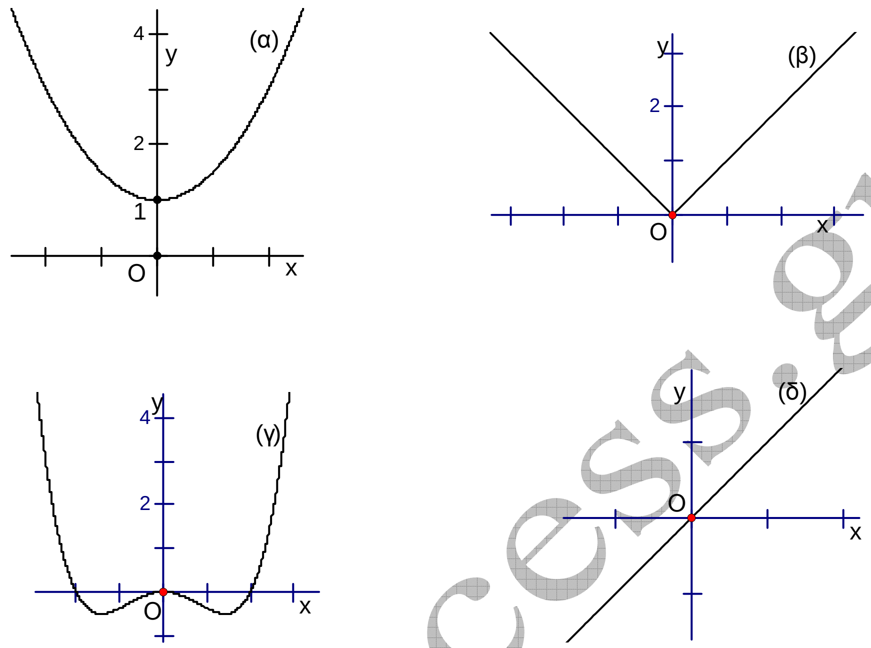
8.
Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 0$, τότε

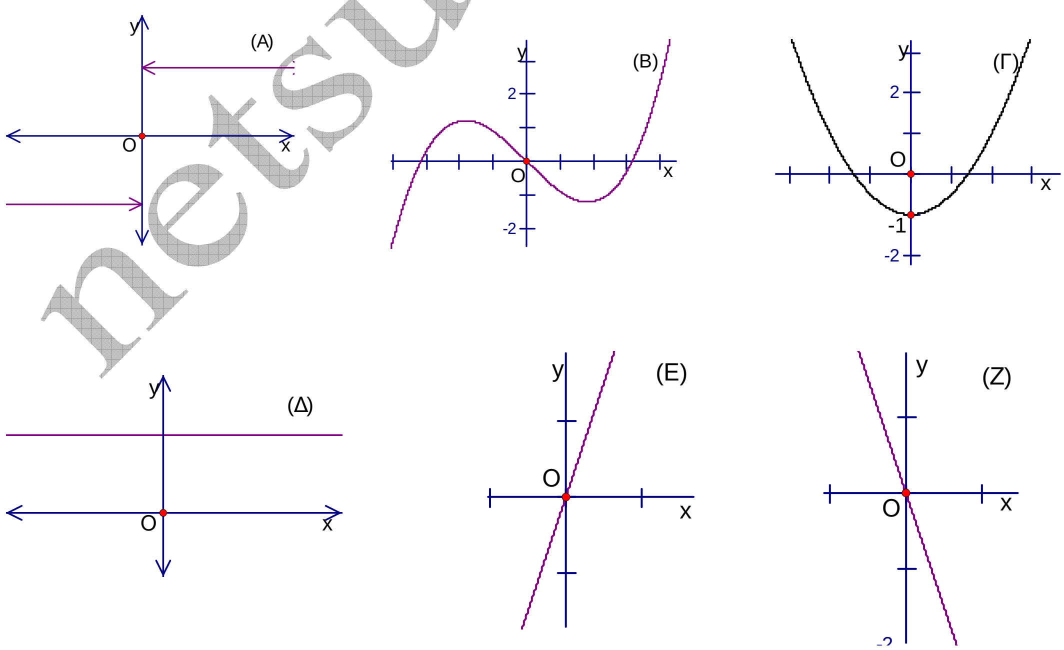
Α. $f(1) = -1$ Β .$f(-1) > 0$ Γ $f(1) > 0$ Δ. $f(-1) = 0$

III

1.

Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζεται ότι είναι η παράγωγός της .





α ⟶ Ε , β ⟶ Α , γ ⟶ Β , δ ⟶ Δ

2.

Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	**ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ**
$f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$	$\psi=2$
$f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}$	$\psi=x-1$
$f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$	$\psi=-x+1$
	$\psi=x$
	$\psi=-x$