5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 184 – 185

Α΄ Ομάδας

1.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = \log_2 x \quad \text{και} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

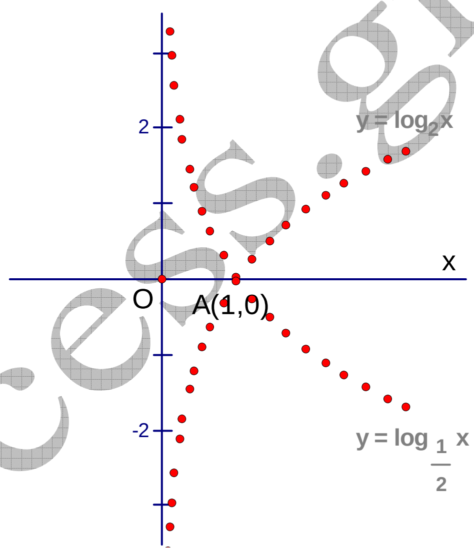
Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.

Λύση

Πίνακας τιμών για τη συνάρτηση

$$f(x) = \log_2 x$$

x	1/4	1/2	1	2	4
y	–2	–1	0	1	2



Μπορούμε να συνεχίσουμε με περισσότερα σημεία.

Έτσι θα έχουμε τη μορφή της C_f

Πίνακας τιμών για τη συνάρτηση

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

x	1/4	1/2	1	2	4
y	2	1	0	–1	–2

Μπορούμε να συνεχίσουμε με περισσότερα σημεία. Έτσι θα έχουμε τη μορφή της C_g

Παρατηρούμε ότι οι C_f και C_g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$

Αυτό συμβαίνει διότι $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} =$

$$= \frac{\log_2 x}{\log_2 1 - \log_2 2} = \frac{\log_2 x}{0-1} = -\log_2 x = -f(x)$$

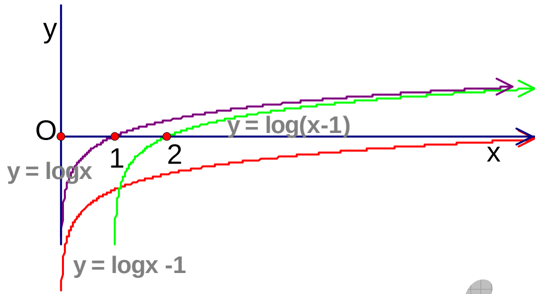
2.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$f(x) = \log x$, $g(x) = \log x - 1$ και $h(x) = \log(x-1)$

Λύση

Μετακινούμε τη C_f κατακόρυφα κατά μία μονάδα προς τα κάτω, οπότε έχουμε τη C_g.



Μετακινούμε τη C_f οριζόντια κατά μία μονάδα προς τα δεξιά, οπότε έχουμε τη C_h.

3.i)

Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο A(2, 4).

Λύση

$A \in C_f \Leftrightarrow 4 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Άρα $f(x) = 2^x$

$A \in C_g \Leftrightarrow 4 = \log_\alpha 2 \Leftrightarrow \alpha^4 = 2 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[4]{2}$

Άρα $g(x) = \log_{\sqrt[4]{2}} x$

3.ii)

Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο B(–2, 4).

Λύση

$$B \in C_f \Leftrightarrow 4 = \alpha^{-2} \Leftrightarrow 2^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$2^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$2 = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Άρα $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$B \in C_g \Leftrightarrow 4 = \log_\alpha(-2)$ αδύνατη

3.iii)

Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο $\Gamma(2, -4)$.

Λύση

$\Gamma \in C_f \iff -4 = \alpha^2$ αδύνατη

$\Gamma \in C_g \iff -4 = \log_\alpha 2 \iff \alpha^{-4} = 2$

$$\frac{1}{\alpha^4} = 2$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 = 2$$

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt[4]{2} \iff \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Άρα $g(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} x$

3.iv)

Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο $\Delta(-2, -4)$.

Λύση

$\Delta \in C_f \iff -4 = \alpha^{-2} \iff -4 = \dfrac{1}{\alpha^2}$ αδύνατη

$\Delta \in C_g \iff -4 = \log_\alpha(-4)$ αδύνατη

4.

Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο $y = 1 + 10\log x$, να φτιάξετε έναν πίνακα τιμών της παραπάνω συνάρτησης για x = 50, 100, 200, 400, 800, 1600 ASA. Τι παρατηρείτε;
(Δίνεται ότι $\log 2 = 0{,}3$)

Λύση

Για $x = 50$, είναι
$$\log x = \log 50 = \log\frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = \log 10^2 - 0{,}3 = 2\log 10 - 0{,}3 = 2 - 0{,}3 = 1{,}7$$
Άρα $y = 1 + 10\cdot 1{,}7 = 1 + 17 = 18$

Για $x = 100$, είναι $\log x = \log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2$
Άρα $y = 1 + 10\cdot 2 = 21$

Για $x = 200$, είναι $\log x = \log 200 = \log(2\cdot 10^2) = \log 2 + \log 10^2$
$$= 0{,}3 + 2\log 10 = 0{,}3 + 2 = 2{,}3$$
Άρα $y = 1 + 10\cdot 2{,}3 = 1 + 23 = 24$

Για $x = 400$, είναι $\log x = \log 400 = \log(4\cdot 10^2) = \log 2^2 + \log 10^2$
$$= 2\log 2 + 2\log 10 = 2\cdot 0{,}3 + 2 = 0{,}6 + 2 = 2{,}6$$
Άρα $y = 1 + 10\cdot 2{,}6 = 1 + 26 = 27$

Για $x = 800$, είναι $\log x = \log 800 = \log(8\cdot 10^2) = \log 2^3 + \log 10^2$
$$= 3\log 2 + 2\log 10 = 3\cdot 0{,}3 + 2 = 0{,}9 + 2 = 2{,}9$$
Άρα $y = 1 + 10\cdot 2{,}9 = 1 + 29 = 30$

Για $x = 1600$, είναι $\log x = \log 1600 = \log(16\cdot 10^2) = \log 2^4 + \log 10^2$
$$= 4\log 2 + 2\log 10 = 4\cdot 0{,}3 + 2 = 1{,}2 + 2 = 3{,}2$$
Άρα $y = 1 + 10\cdot 3{,}2 = 1 + 32 = 33$

x	50	100	200	400	800	1600
y	18	21	24	27	30	33

Παρατηρούμε ότι, ενώ οι τιμές του x είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο 2, οι τιμές του y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά 3.

5.i)

Να λυθεί η εξίσωση $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2$

Λύση

Περιορισμοί: Πρέπει $x+1>0$ και $x-1>0 \Leftrightarrow$

$x>-1$ και $x>1 \Leftrightarrow x>1$

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2 \Leftrightarrow \log[(x+1)(x-1)]=\log 2$$
$$(x+1)(x-1)=2$$
$$x^2-1=2$$
$$x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$$

5.ii)

Να λυθεί η εξίσωση $\log(x-1)+\log x=1-\log 5$

Λύση

Περιορισμοί: Πρέπει $x-1>0$ και $x>0 \Leftrightarrow$

$x>1$ και $x>0 \Leftrightarrow x>1$

$$\log(x-1)+\log x=1-\log 5 \Leftrightarrow \log[(x-1)x]=\log 10-\log 5$$
$$\log[(x-1)x]=\log\frac{10}{5}$$
$$(x-1)x=2$$
$$x^2-x-2=0$$

$\Delta=1+8=9$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=2$ ή -1 που απορρίπτεται.

5.iii)

Να λυθεί η εξίσωση $\log x^2=(\log x)^2$

Λύση

Περιορισμός: Πρέπει $x>0$

$$\log x^2=(\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x=(\log x)^2$$

Θέτουμε $\log x=y$

Η εξίσωση γίνεται $2y=y^2 \Leftrightarrow y^2-2y=0$
$$y(y-2)=0$$
$$y=2 \text{ ή } y=0$$

Για $y=0$, έχουμε $\log x=0 \Leftrightarrow x=1$

Για $y=2$, έχουμε $\log x=2 \Leftrightarrow x=10^2=100$

5.iv)

Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2+1) - \log x = \log 2$

Λύση

Περιορισμός: Πρέπει $x > 0$

$$\log(x^2+1) - \log x = \log 2 \Leftrightarrow \log\frac{x^2+1}{x} = \log 2$$

$$\frac{x^2+1}{x} = 2$$

$$x^2+1 = 2x$$

$$x^2+1-2x = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

6.i)

Να λυθεί η εξίσωση $5^x = 2^{1-x}$

Λύση

$$5^x = 2^{1-x} \Leftrightarrow 5^x = 2^1 2^{-x}$$

$$5^x = \frac{2}{2^x}$$

$$5^x\ 2^x = 2$$

$$10^x = 2 \Leftrightarrow x = \log 2$$

6.ii)

Να λυθεί η εξίσωση $3^{x-1} = 2^{x+1}$

Λύση

$$3^{x-1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \frac{3^x}{3} = 2\cdot 2^x$$

$$\frac{3^x}{2^x} = 6$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 6$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right)^x = \log 6$$

$$x\log(1{,}5) = \log 6 \Leftrightarrow x = \frac{\log 6}{\log(1{,}5)}$$

7.

Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\log_3 2$ και $\log_3 5$ **ii)** $\log_{0,3} 5$ και $\log_{0,3} 7$

iii) $\log(x^2+1)$ και $\log 2x$

Λύση

i)

Θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_3 x$

Επειδή η βάση είναι $\alpha = 3 > 1$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως: $2 < 5 \Rightarrow f(2) < f(5) \Rightarrow \log_3 2 < \log_3 5$

ii)

Θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{0,3} x$

Επειδή η βάση είναι $\alpha = 0,3 < 1$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως: $5 < 7 \Rightarrow f(5) > f(7) \Rightarrow \log_{0,3} 5 > \log_{0,3} 7$

iii)

Περιορισμός: $x > 0$

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $x^2 + 1 \geq 2x$

Αρκεί $x^2 + 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει

Θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log x$

Επειδή η βάση είναι $\alpha = 10 > 1$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

α) Όταν $x = 1$, τότε $x^2 + 1 = 2x$, οπότε $\log(x^2+1) = \log 2x$

β) Όταν $x \neq 1$, τότε $x^2 + 1 > 2x$, οπότε $f(x^2+1) > f(2x)$

δηλαδή $\log(x^2+1) > \log 2x$

8.

Ένα διάλυμα θεωρείτε **όξινο** αν $[H^+] > 10^{-7}$ και **βασικό** αν $[H^+] < 10^{-7}$. Να βρείτε τις αντίστοιχες ανισότητες για το pH.

Λύση

$[H^+] > 10^{-7} \Leftrightarrow \log[H^+] > \log 10^{-7}$

$\log[H^+] > -7$

$-\log[H^+] < 7 \Leftrightarrow pH < 7$

Επομένως το **όξινο** διάλυμα έχει $pH < 7$ και το **βασικό** έχει $pH > 7$

Β΄ Ομάδας

1.i)

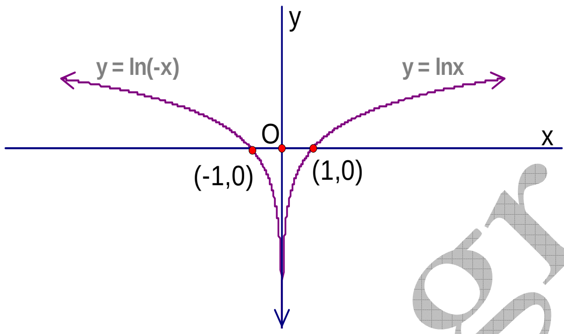
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$

Λύση

Πρέπει $|x|>0 \iff x\neq 0$

Άρα πεδίο ορισμού είναι

$\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$



$f(-x)=\ln|-x| = \ln|x| = f(x)$

άρα η συνάρτηση είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{όταν } x>0\\ \ln(-x), & \text{όταν } x<0\end{cases}$

Επομένως, η C_f προκύπτει από την καμπύλη με εξίσωση $y=\ln x$ και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

1.ii)

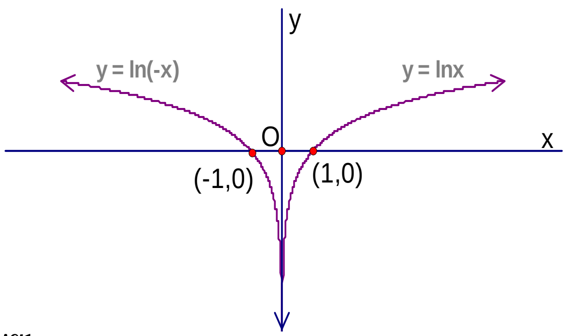
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2$

Λύση

Πρέπει $x^2>0 \iff x\neq 0$

Άρα πεδίο ορισμού είναι

$\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$



$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2 = \ln\sqrt{x^2} = \ln|x|$

$f(-x)=\ln|-x| = \ln|x| = f(x)$

άρα η συνάρτηση είναι άρτια,

οπότε η γραφική της παράσταση είναι

συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{όταν } x>0\\ \ln(-x), & \text{όταν } x<0\end{cases}$

Επομένως, η C_f προκύπτει από την καμπύλη με εξίσωση $y=\ln x$ και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

1.iii)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$

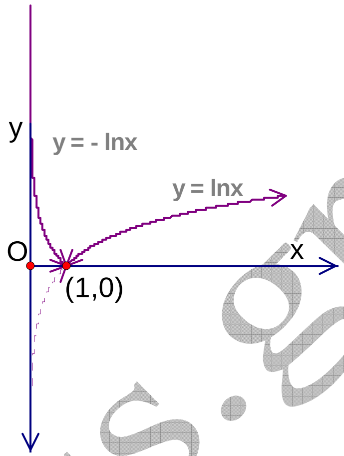
Λύση

Πρέπει $x > 0$

Άρα πεδίο ορισμού είναι

$\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- Όταν $\ln x > 0$, δηλαδή όταν $x > 1$, τότε $|\ln x| = \ln x$, οπότε $f(x) = \ln x$
- Όταν $\ln x < 0$, δηλαδή όταν $x < 1$, τότε $|\ln x| = -\ln x$, οπότε $f(x) = -\ln x$



Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{όταν } x \geq 1 \\ -\ln x, & \text{όταν } x < 1 \end{cases}$$

Επομένως, η C_f προκύπτει από την καμπύλη με εξίσωση $y = \ln x$ για $x \geq 1$ και

τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ για $0 < x < 1$

1.iv)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \log(10x - 20)$

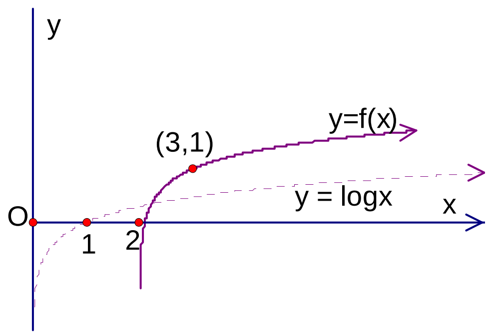
Λύση

Πρέπει $10x - 20 > 0 \Leftrightarrow$

$10x > 20$

$x > 2$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $(2, +\infty)$



$f(x) = \log(10x - 20) \Leftrightarrow$

$f(x) = \log[10(x - 2)]$

$f(x) = \log 10 + \log(x - 2)$

$f(x) = 1 + \log(x - 2)$

Άρα η C_f προκύπτει από την καμπύλη με εξίσωση $y = \log x$ μεταφέροντάς τη κατά 1 μονάδα επάνω και 2 δεξιά.

2.i)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ είναι περιττή.

Λύση

Εύρεση του πεδίου ορισμού

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x+\sqrt{x^2+1} > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geq 0$

αφού $|x| \geq -x$, δηλαδή $x+|x| \geq 0$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ και $-x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \ln 1 - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = 0 - f(x) = -f(x)
\end{aligned}
$$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

2.ii)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ είναι περιττή.

Λύση

Εύρεση του πεδίου ορισμού

Πρέπει $\dfrac{1-x}{1+x} > 0 \iff (1-x)(1+x) > 0$

$1-x^2 > 0$

$x^2 < 1 \iff |x| < 1 \iff -1 < x < 1$

Άρα $D_f = (-1,\ 1)$, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων, άρα για κάθε $x \in D_f \Rightarrow$ και $-x \in D_f$

$$f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$= \ln\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{1-x}{1+x} = 0 - f(x) = -f(x)$$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

3.

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log 178$, $\log\sqrt{81\left(2^x+2\cdot 3^x\right)}$, $x\log 3$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

Λύση

Πρέπει και αρκεί $2\log\sqrt{81\left(2^x+2\cdot 3^x\right)} = \log 178 + x\log 3 \iff$

$$\log\sqrt{81\left(2^x+2\cdot 3^x\right)}^2 = \log 178 + \log 3^x$$

$$\log\sqrt{81\left(2^x+2\cdot 3^x\right)}^2 = \log(178\cdot 3^x)$$

$$81(2^x + 2\cdot 3^x) = 178\,.\,3^x$$

$$81\,.\,2^x + 162\cdot 3^x = 178\cdot 3^x$$

$$81\cdot 2^x = 16\cdot 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{16}{81} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \iff x = 4$$

4.

Αν $\log_\alpha \beta = \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha$ δείξτε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$

Λύση

Περιορισμοί $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$ τότε

$$\log_\alpha \beta = \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha \Leftrightarrow \frac{\log\beta}{\log\alpha} = \frac{\log\gamma}{\log\beta} \cdot \frac{\log\alpha}{\log\gamma} \Leftrightarrow$$

$$(\log\beta)^2 = (\log\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\log\beta = \log\alpha \text{ ή } \log\beta = -\log\alpha \Leftrightarrow$$

$$\log\beta = \log\alpha \text{ ή } \log\beta = \log\alpha^{-1} \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = \frac{1}{\beta}$$

5.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$.

Λύση

Περιορισμοί: Πρέπει $x > 0$ και $\log x \geq 0 \Leftrightarrow$

$x > 0$ και $x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log x = \sqrt{\log x}$$

$$\log x = 2\sqrt{\log x}$$

$$\log^2 x = 4\log x$$

$$\log^2 x - 4\log x = 0$$

$$\log x(\log x - 4) = 0$$

$$\log x = 0 \text{ ή } \log x - 4 = 0$$

$$x = 1 \text{ ή } \log x = 4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 10^4$$

5.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 = 0$

Λύση

Θέτουμε $\ln^2 x = y$.

Η εξίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 4 = 0$

Ρίζες: $y = 1$ ή $y = 4$

α) για $y = 1$ έχουμε $\ln^2 x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1$ ή $\ln x = -1 \Leftrightarrow$

$x = e$ ή $x = e^{-1}$

β) για $y = 4$ έχουμε $\ln^2 x = 4 \Leftrightarrow \ln x = 2$ ή $\ln x = -2 \Leftrightarrow$

$x = e^2$ ή $x = e^{-2}$

6.

Να αποδείξετε ότι $x^{\log 5} = 5^{\log x}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$5^{2\log x} = 5 + 4x^{\log 5}$$

Λύση

$x^{\log 5} = 5^{\log x}$ $\quad \log(x^{\log 5}) = \log(5^{\log x})$

$\log 5 \cdot \log x = \log x \cdot \log 5$ που ισχύει

Η εξίσωση γράφεται $\left(5^{\log x}\right)^2 = 5 + 4x^{\log 5}$

Θέτουμε $x^{\log 5} = 5^{\log x} = y$

Η εξίσωση γίνεται $y^2 = 5 + 4y \quad y^2 - 4y - 5 = 0 \quad y = 5$ ή $y = -1$

α) για $y = 5$ έχουμε $5^{\log x} = 5^1 \quad \log x = 1 \quad x = 10$

β) για $y = -1$ έχουμε $5^{\log x} = -1$ που είναι αδύνατη

7.i)

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \log(xy) = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases}$

Λύση

Περιορισμοί: $x > 0$ και $y > 0$

$$\begin{cases} \log(xy) = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases}$$

Αναζητάμε δύο αριθμούς, τους $\log x$ και $\log y$, με άθροισμα $4\log 2$ και γινόμενο $3(\log 2)^2$.

Αυτοί οι αριθμοί είναι οι $\log 2$ και $3\log 2$.

Επομένως $\begin{cases} \log x = \log 2 \\ \log y = 3\log 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \log x = 3\log 2 \\ \log y = \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \log y = \log 2^3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \log x = \log 2^3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2^3 = 8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2^3 = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

7.ii)

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} xy=8 \\ \log y=2\log x \end{cases}$

Λύση

Περιορισμοί: $x>0$ και $y>0$

$$\begin{cases} xy=8 \\ \log y=2\ \log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=8 \\ \log y=\log x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=8 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xx^2=8 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3=8 \\ y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2^2=4 \end{cases}$$

7.iii)

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=2x \\ 2\log y=\log x+\log 2 \end{cases}$

Λύση

Περιορισμοί: $x>0$ και $y>0$

$$\begin{cases} y=2x \\ 2\log y=\log x+\log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ \log y^2=\log(2x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2x \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=y^2 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

8.i)

Να λύσετε την ανίσωση $\log x^2 > (\log x)^2$

Λύση

Περιορισμός: $x > 0$

$$\log x^2 > (\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x > (\log x)^2$$

Θέτουμε $\log x = y$

Η ανίσωση γίνεται $2y > y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y < 0$

Τριώνυμο αρνητικό, ετερόσημο του $\alpha = 1$, άρα ο y εντός των ριζών 0 και 2.

$$0 < y < 2 \Leftrightarrow 0 < \log x < 2$$

$$\log 1 < \log x < \log 100$$

$$1 < x < 100$$

8.ii)

Να λύσετε την ανίσωση $\log(x^2 - 4) < \log 3x$

Λύση

Περιορισμός: $3x > 0$ και $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$

$x > 0$ και $x^2 > 4$

$x > 0$ και $|x| > 2$

$x > 0$ και $x < -2$ ή $x > 2 \Leftrightarrow x > 2$ **(1)**

$$\log(x^2 - 4) < \log 3x \Leftrightarrow x^2 - 4 < 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

$-1 < x < 4$ **(2)**

Συναλήθευση των (1), (2) $\quad 2 < x < 4$

8.iii)

Να λύσετε την ανίσωση $x^{\log x} > 10$

Λύση

Περιορισμός: $x > 0$ **(1)**

$$x^{\log x} > 10 \Leftrightarrow \log(x^{\log x}) > \log 10$$

$$\log x \cdot \log x > 1$$

$$\log^2 x > 1$$

$$|\log x| > 1 \Leftrightarrow \log x < -1 \text{ ή } \log x > 1$$

$$x < 10^{-1} \text{ ή } x > 10$$

$$x < \frac{1}{10} \text{ ή } x > 10 \quad \textbf{(2)}$$

Συναλήθευση των (1), (2) : $0 < x < \dfrac{1}{10}$ ή $x > 10$

9 .

Δείξτε ότι $\log_2 3 > \log_6 9$

Λύση

$$\log_2 3 > \log_6 9 \Leftrightarrow \frac{\log 3}{\log 2} > \frac{\log 9}{\log 6}$$

$$\frac{\log 3}{\log 2} > \frac{\log 3^2}{\log(2\cdot 3)}$$

$$\frac{\log 3}{\log 2} > \frac{2\log 3}{\log 2 + \log 3}$$

$$\log 3(\log 2 + \log 3) > 2\log 2\log 3$$

$$\log 3\log 2 + (\log 3)^2 > 2\log 2\log 3$$

$$(\log 3)^2 - \log 2\log 3 > 0$$

$$\log 3(\log 3 - \log 2) > 0$$

πράγμα που ισχύει αφού $\log 3 > 0$ και $\log 3 > \log 2$

10.

Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε $\alpha, \ \beta > 0$ με $\alpha \neq \beta$, ισχύει :

$$\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} > \alpha^{\beta}\,\beta^{\alpha}$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\log(\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta}) > \log(\alpha^{\beta}\,\beta^{\alpha})$

$$\log\alpha^{\alpha} + \log\beta^{\beta} > \log\alpha^{\beta} + \log\beta^{\alpha}$$

$$\alpha\log\alpha + \beta\log\beta > \beta\log\alpha + \alpha\log\beta$$

$$\alpha\log\alpha + \beta\log\beta - \beta\log\alpha - \alpha\log\beta > 0$$

$$\alpha(\log\alpha - \log\beta) - \beta(\log\alpha - \log\beta) > 0$$

$$(\log\alpha - \log\beta)\,(\alpha - \beta) > 0$$

- Όταν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και $\log\alpha > \log\beta \Rightarrow$
  $\alpha - \beta > 0$ και $\log\alpha - \log\beta > 0 \Rightarrow$
  $(\log\alpha - \log\beta)\,(\alpha - \beta) > 0$

- Όταν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$ και $\log\alpha < \log\beta \Rightarrow$
  $\alpha - \beta < 0$ και $\log\alpha - \log\beta < 0 \Rightarrow$
  $(\log\alpha - \log\beta)\,(\alpha - \beta) > 0$