

## 4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 153 – 154

### Α' Ομάδας

#### 1.i)

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$

#### Λύση

Είναι  $x^2 - x = x(x-1)$

Ε.Κ.Π =  $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  και  $x-1 \neq 0$   
 $x \neq 0$  και  $x \neq 1$  (περιορισμοί)

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} &= \frac{x^2-3x+2}{x} &\Leftrightarrow & \frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x^2-3x+2}{x} \\ x(3x^2-1) - 2 &= (x-1)(x^2-3x+2) \\ 3x^3 - x - 2 &= x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2 \\ 2x^3 + 4x^2 - 6x &= 0 \\ 2x(x^2 + 2x - 3) &= 0 &\Leftrightarrow & \\ x = 0 & \text{ (απορρίπτεται) } &\text{ ή } & x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Delta = 4 + 12 = 16, \\ x = \frac{-2 \pm 4}{2} &= 1 \text{ (απορρίπτεται) } &\text{ ή } & -3 \end{aligned}$$

**1.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

**Λύση**

Είναι  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Ε.Κ.Π =  $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x-1 \neq 0 & \text{και} & x+1 \neq 0 \\ x \neq 1 & \text{και} & x \neq -1 \end{matrix}$  (περιορισμοί)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} &= \frac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} \\ x^2(x+1) - 2(x-1) &= 4 \\ x^3 + x^2 - 2x + 2 &= 4 \\ x^3 + x^2 - 2x - 2 &= 0 \\ x^2(x+1) - 2(x+1) &= 0 \\ (x+1)(x^2-2) &= 0 \\ x+1=0 \quad \text{ή} \quad x^2-2 &= 0 \\ x=-1 \text{ (απορρίπτεται)} \quad \text{ή} \quad x^2=2 \\ x=\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x=-\sqrt{2} \end{aligned}$$

**2.**

Να λύσετε την εξίσωση  $2\eta\mu^3x + \sigma\upsilon\nu^2x + 2\eta\mu x - 2 = 0$

**Λύση**

$$2\eta\mu^3x + \sigma\upsilon\nu^2x + 2\eta\mu x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^3x + 1 - \eta\mu^2x + 2\eta\mu x - 2 = 0$$

$$2\eta\mu^3x - \eta\mu^2x + 2\eta\mu x - 1 = 0$$

$$2\eta\mu x(\eta\mu^2x + 1) - (\eta\mu^2x + 1) = 0$$

$$(\eta\mu^2x + 1)(2\eta\mu x - 1) = 0$$

$$2\eta\mu x - 1 = 0$$

$$2\eta\mu x = 1$$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**3.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x^3} = -4x$

**Λύση**

Περιορισμοί:  $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$  **(1)**

επειδή  $\sqrt{x^3} \geq 0$ , από την εξίσωση θα είναι και  $-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$  **(2)**

Από (1) και (2) έχουμε  $x = 0$

**3.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{3x-2} = 4$

**Λύση**

Περιορισμός:  $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$$\sqrt{3x-2} = 4 \Leftrightarrow 3x-2 = 16$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

**3.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{5x-1} = -4$

**Λύση**

Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού  $\sqrt{5x-1} \geq 0$  και  $-4 < 0$ , οπότε δεν υπάρχουν τιμές του  $x$  για τις οποίες οι δύο ποσότητες να είναι ίσες.

**3.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x+3} = x+1$

**Λύση**

Περιορισμοί:  $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

επειδή  $\sqrt{x+3} \geq 0$ , από την εξίσωση θα είναι και  $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$$\sqrt{x+3} = x+1 \Leftrightarrow x+3 = (x+1)^2$$

$$x+3 = x^2+2x+1$$

$$x^2+x-2 = 0$$

$$x = -2 \text{ (απορρίπτεται)} \quad \text{ή} \quad x = 1$$

**3.v)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1$

**Λύση**

Περιορισμοί:  $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

$10-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{10-x} + 1)^2$$

$$x+3 = 10-x + 2\sqrt{10-x} + 1$$

$$2x-8 = 2\sqrt{10-x}$$

$$x-4 = \sqrt{10-x} \quad (1)$$

Περιορισμός:  $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

$$(1) \Leftrightarrow (x-4)^2 = 10-x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 10-x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 1 \text{ (απορρίπτεται)} \quad \text{ή} \quad x = 6$$

**3.vi)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10$

**Λύση**

Περιορισμοί:  $x \geq 0$   
 $x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 20$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x-20} = 10 - \sqrt{x} \quad (1)$$

Περιορισμός: επειδή  $\sqrt{x-20} \geq 0$ , από την εξίσωση (2) θα είναι και

$$10 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$x \leq 100$$

$$(1) \Leftrightarrow x - 20 = (10 - \sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x - 20 = 100 - 20\sqrt{x} + x$$

$$20\sqrt{x} = 120$$

$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36$$

**3.vii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x} = \frac{x-8}{2\sqrt{x}} + 3$

**Λύση**

Περιορισμοί:  $x \geq 0$   
 $2\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$\sqrt{x} = \frac{x-8}{2\sqrt{x}} + 3 \Leftrightarrow$$

$$2x = x - 8 + 6\sqrt{x} \Leftrightarrow x + 8 = 6\sqrt{x} \quad (1)$$

Περιορισμός: επειδή  $6\sqrt{x} \geq 0$ , από την εξίσωση θα είναι και

$$x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -8$$

$$(1) \quad x^2 + 16x + 64 = 36x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = 16$$

**3.viii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}$

**Λύση**

Περιορισμός:  $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow 1+2\sqrt{x} = x+1 \\ 2\sqrt{x} &= x \quad \text{(1)} \end{aligned}$$

Περιορισμός: επειδή  $2\sqrt{x} \geq 0$ , από την εξίσωση θα είναι και  $x \geq 0$

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 4x &= x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\ &x(x-4) = 0 \\ &x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 4 = 0 \\ &x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 4 \end{aligned}$$

**4.i)**

Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x-2}{x+1} > 0$

**Λύση**

$$\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \text{ και } x \neq -1 \quad \text{(1)}$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1 \quad (\text{τριώνυμο με ρίζες 2 και -1})$$

$$(1) \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 2$$

**4.ii)**

Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$

**Λύση**

Πρέπει να είναι  $x \neq 3$  τότε

$$\frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leq 0 \quad \text{(1)}$$

$$(2x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ή } x = 1 \quad (\text{τριώνυμο με ρίζες } -\frac{1}{2} \text{ και } 1)$$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 1$$

**4.iii )**

Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0$

**Λύση**

Πρέπει να ισχύει  $x^2 + x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$  και  $x \neq 1$

Τότε

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \leq 0 \quad (1)$$

Οι ρίζες των τριωνύμων του πρώτου μέλους είναι οι  $2, -1, -2, 1$

Το πρόσημο του γινομένου  $(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2)$  φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$	
πρόσημο	+	0	-	0	+	0	+

Από το παραπάνω πίνακα προσήμου και λαμβάνοντας υπόψη και τους περιορισμούς έχουμε ότι  $(1) \Leftrightarrow -2 < x \leq -1$  ή  $1 < x \leq 2$

**5. i)**

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x + 3}{x - 1} > 4$$

**Λύση**

Πρέπει να ισχύει  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$  τότε

$$\frac{2x + 3}{x - 1} > 4 \Leftrightarrow \frac{2x + 3}{x - 1} - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x + 3 - 4(x - 1)}{x - 1} > 0$$

$$\frac{-2x + 7}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2x + 7)(x - 1) > 0 \quad (1)$$

$$(-2x + 7)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ ή } x = 1 \text{ τριώνυμο με ρίζες } 1 \text{ και } \frac{7}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{2}$$

**5.ii)**

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x-2}{3x+5} \leq 4$$

**Λύση**

Πρέπει να ισχύει  $3x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{3}$

$$\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-2-4(3x+5)}{3x+5} \leq 0$$

$$\frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(-11x-22)(3x+5) \leq 0, x \neq -\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$(-11x-22)(3x+5) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = -\frac{5}{3} \text{ τριώνυμο με ρίζες } -2 \text{ και } -\frac{5}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x > -\frac{5}{3}$$

**5.iii)**

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0$$

**Λύση**

Πρέπει να ισχύει  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$  τότε

$$\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10+2(x-1)}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{x^2-x-12}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2-x-12)(x-1) \leq 0, x \neq 1 \quad (1)$$

$$(x^2-x-12)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 4 \text{ ή } x = 1$$

Το πρόσημο του γινόμενου  $(x^2-x-12)(x-1)$  φαίνεται παρακάτω



x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
πρόσημο	-	0	+	0	- 0 +

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$$H(1) \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } 1 < x \leq 4$$

### 5. iv)

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1}$$

**Λύση**

Πρέπει να ισχύει  $3x-5 \neq 0$  και  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{3}$  και  $x \neq 1$  τότε

$$\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(x-1) - 2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 7x + 10)(3x-5)(x-1) \leq 0, \quad x \neq \frac{5}{3} \text{ και } x \neq 1 \quad (1)$$

$$(x^2 - 7x + 10)(3x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 5 \text{ ή } x = \frac{5}{3} \text{ ή } x = 1$$

Το πρόσημο του γινομένου  $(x^2 - 7x + 10)(3x-5)(x-1)$  φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	2	5	$+\infty$
πρόσημο	+	0	- 0	+	0	- 0 +

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$$H(1) \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{3} \text{ ή } 2 \leq x \leq 5$$

**5. v)**

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2}$$

**Λύση**

Πρέπει να ισχύει

$$2x-1 \neq 0 \text{ και } x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ και } x \neq -2 \text{ τότε}$$

$$\frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x(x+2)-3(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2-4x+3)(2x-1)(x+2) \geq 0, \quad x \neq \frac{1}{2} \text{ και } x \neq -2 \quad (1)$$

$$(x^2-4x+3)(2x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -2$$

Το πρόσημο του γινομένου  $(x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$  φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$	
πρόσημο	+	0	-	0	+	0	+

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ ή } x \geq 3$$

6.

Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Ε.Κ.Π} = x(2x-1) \neq 0 &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } 2x-1 \neq 0 \\ &x \neq 0 \text{ και } 2x \neq 1 \\ &x \neq 0 \text{ και } x \neq \frac{1}{2} \text{ (περιορισμοί)} \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)} \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$x^2 + \frac{2x-1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\frac{x^3+1}{x} \geq 0$$

$$x(x^3+1) \geq 0$$

$$x(x+1)(x^2-x+1) \geq 0 \quad (1)$$

Για το τριώνυμο  $x^2 - x + 1$ : Είναι  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ , άρα είναι ομόσημο του  $a = 1$ , δηλαδή θετικό.

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0 \quad (2)$$

Το πρώτο μέλος της (2) είναι τριώνυμο με ρίζες  $-1$  και  $0$ .

Η (2)  $\Leftrightarrow x \leq -1$  ή  $0 \leq x$  και λόγω των περιορισμών,

$$x \leq -1 \text{ ή } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ή } \frac{1}{2} < x$$

## Β' Ομάδας

### 1.i)

Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x}$

**Λύση**

$$\text{Περιορισμοί: } 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 3x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x} &\Leftrightarrow 2x+3 < 1-3x \\ &5x < -2 \\ &x < -\frac{2}{5} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Συναλήθευση των (1), (2), (3)} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{2}{5}$$

### 1.ii)

Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{x-3} > x-5$

**Λύση**

$$\text{Περιορισμός: } x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \quad (1)$$

$$\text{α) Όταν } x - 5 < 0 \text{ δηλαδή } x < 5. \quad (2)$$

Τότε η δοσμένη ανίσωση επαληθεύεται για κάθε  $x$  που ικανοποιεί τις (1) και (2), δηλαδή  $3 \leq x < 5$ , αφού το πρώτο μέλος είναι  $\geq 0$  και το δεύτερο  $< 0$

$$\text{β) Όταν } x - 5 \geq 0 \text{ δηλαδή } x \geq 5. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε η δοσμένη ανίσωση} &\Leftrightarrow x - 3 > (x - 5)^2 \\ &x - 3 > x^2 - 10x + 25 \\ &x^2 - 11x + 28 < 0 \end{aligned}$$

Τριώνυμο με ρίζες 4 και 7, ετερόσημο του  $a = 1$ , άρα ο  $x$  είναι εντός των ριζών, δηλαδή  $4 < x < 7$  (4)

Συναληθεύουμε τις (1), (3) και (4), οπότε  $5 \leq x < 7$

**2.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$

**Λύση**

Περιορισμός:  $x \geq 0$

Θέτουμε  $\sqrt{x} = y$ , οπότε  $x = y^2$  και  $y \geq 0$

Η εξίσωση γίνεται  $y^2 + 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = -5$  (απορρίπτεται) ή  $y = 2$ .

Άρα  $x = 2^2 = 4$ .

**2.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$

**Λύση**

Περιορισμός:  $x \geq 0$

Θέτουμε  $\sqrt[3]{x} = y$ , οπότε  $\sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = y^2$  και  $y \geq 0$

Η εξίσωση γίνεται  $y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3$  (απορρίπτεται) ή  $y = 2$ .

Από την ισότητα  $\sqrt[3]{x} = y$  έχουμε  $\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$

**3.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 + x - 4 = \sqrt{x^2 + x - 2}$

**Λύση**

Περιορισμός:  $x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$  ή  $x \geq 1$

Θέτουμε  $x^2 + x - 2 = y \geq 0$ , οπότε  $x^2 + x - 4 = y - 2$

Η εξίσωση γίνεται  $y - 2 = \sqrt{y}$

Περιορισμός: Επειδή  $\sqrt{y} \geq 0$ , θα είναι και  $y - 2 \geq 0$  δηλαδή  $y \geq 2$

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow (y - 2)^2 = y$

$$y^2 - 4y + 4 = y$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 1 \text{ (απορρίπτεται) ή } y = 4$$

Η ισότητα  $x^2 + x - 2 = y \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 4$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3 \text{ ή } x = 2$$

**3.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+4}$

**Λύση**

Περιορισμοί:  $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

$x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

Συναλήθευση  $x \geq 4$  (1)

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4})^2 = (\sqrt{x+4})^2 \Leftrightarrow x-1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} + x-4 = x+4$$

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} = 9-x \quad (\text{A})$$

Επειδή  $2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} \geq 0$ , θα είναι και  $9-x \geq 0$

$$x \leq 9 \quad (2)$$

Η εξίσωση (A)  $\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4})^2 = (9-x)^2$

$$4(x-1)(x-4) = 81 - 18x + x^2$$

$$4x^2 - 16x - 4x + 16 = 81 - 18x + x^2$$

$$3x^2 - 2x - 65 = 0$$

$$\Delta = 4 + 780 = 784$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{2 \pm 28}{6} = 5 \quad \text{ή} \quad -\frac{13}{3} \quad (\text{απορρίπτεται λόγω των (1), (2)})$$

**4.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x-1} = \alpha$

**Λύση**

Περιορισμός:  $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Επειδή  $\sqrt{x-1} \geq 0$ , θα είναι και  $\alpha \geq 0$ .

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow x-1 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = 1 + \alpha^2$

**4.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{4x^2+1} = 2x - \lambda$

**Λύση**

Επειδή  $\sqrt{4x^2+1} > 0$ , θα είναι και  $2x - \lambda > 0$  (1)

Η εξίσωση  $\Leftrightarrow 4x^2+1 = (2x-\lambda)^2$

$$4x^2+1 = 4x^2 - 4\lambda x + \lambda^2$$

$$4\lambda x = \lambda^2 - 1 \quad (2)$$

α) Όταν  $\lambda = 0$ , η (2) γίνεται  $0 = -1$  αδύνατη

β) Όταν  $\lambda \neq 0$  η (2) γίνεται  $x = \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda}$

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 2 \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} - \lambda > 0 &\Leftrightarrow \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} - \lambda > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda^2 - 1 - 2\lambda^2}{2\lambda} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda^2 - 1}{2\lambda} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(\lambda^2 + 1)}{2\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0 \end{aligned}$$

### 5.

Να λύσετε την εξίσωση  $2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x + 4 = 0$

**Λύση**

$$2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3(1 - \eta\mu^2 x) - 3\eta\mu x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3 + 3\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x + 3\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$$

Θέτουμε  $\eta\mu x = y$ , οπότε η εξίσωση γίνεται  $2y^4 - 3y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες  $1, -1$  του σταθερού όρου.

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \end{array}$$

Η εξίσωση γίνεται  $(y - 1)(2y^3 - y^2 + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(y - 1)[2y(y^2 + 1) - (y^2 + 1)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - 1)(y^2 + 1)(2y - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 2y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \quad \text{ή} \quad y = \frac{1}{2}$$

α) για  $y = 1$  έχουμε  $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

β) για  $y = \frac{1}{2}$  έχουμε  $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

[netsuccess.gr](http://netsuccess.gr)