3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 95 – 97

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$συν\frac{\pi}{12}\ συν\frac{\pi}{4} - ημ\frac{\pi}{12}\ ημ\frac{\pi}{4}$

Λύση

$$\begin{aligned} συν\frac{\pi}{12}\ συν\frac{\pi}{4} - ημ\frac{\pi}{12}\ ημ\frac{\pi}{4} &= συν\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= συν\frac{4\pi}{12} \\ &= συν\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.ii)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$συν\ 170^o\ συν\ 50^o + ημ\ 170^o\ ημ\ 50^o$

Λύση

$$\begin{aligned} συν\ 170^o\ συν\ 50^o + ημ\ 170^o\ ημ\ 50^o &= συν\ (\ 170^o - 50^o\ ) \\ &= συν\ 120^o = \\ &= συν\ (\ 180^o - 60^o\ ) \\ &= -\ συν\ 60^o = -\ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.iii)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$ημ\ 110^o\ ημ\ 70^o - συν\ 110^o\ συν\ 70^o$

Λύση

$$\begin{aligned} ημ\ 110^o\ ημ\ 70^o - συν\ 110^o\ συν\ 70^o &= -\ (συν\ 110^o\ συν\ 70^o - ημ\ 110^o\ ημ\ 70^o\ ) \\ &= -\ συν\ (\ 110^o + 70^o\ ) \\ &= -\ συν\ 180^o = -\ (-\ 1) = 1 \end{aligned}$$

1.iv)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$$\sigmaυν\frac{7\pi}{12}\,\sigmaυν\frac{\pi}{12}+ημ\frac{7\pi}{12}\,ημ\frac{\pi}{12}$$

Λύση

$$\begin{aligned}\sigmaυν\frac{7\pi}{12}\,\sigmaυν\frac{\pi}{12}+ημ\frac{7\pi}{12}\,ημ\frac{\pi}{12} &= \sigmaυν\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \sigmaυν\frac{6\pi}{12}\\ &= \sigmaυν\frac{\pi}{2} = 0\end{aligned}$$

2.i)

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση

$$\sigmaυν\,3x\,\sigmaυν(-2x)-ημ3x\;\;ημ(-2x)$$

Λύση

$$\sigmaυν\,3x\,\sigmaυν(-2x)-ημ3x\;\;ημ(-2x)=\sigmaυν\,\big(3x+(-2x)\big) = \sigmaυνx$$

2.ii)

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση

$$\sigmaυν\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sigmaυνx+ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)ημx$$

Λύση

$$\sigmaυν\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sigmaυνx+ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)ημx = \sigmaυν\left(x+\frac{\pi}{4}-x\right)=\sigmaυν\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.i)

Να αποδείξετε ότι $\sigmaυν\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigmaυν\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\sigmaυνx$

Λύση

$$\begin{aligned}\sigmaυν\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigmaυν\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \sigmaυνx\,\sigmaυν\frac{\pi}{4}-ημx\,ημ\frac{\pi}{4}+\sigmaυνx\,\sigmaυν\frac{\pi}{4}+ημx\,ημ\frac{\pi}{4}\\ &= 2\sigmaυνx\,\sigmaυν\frac{\pi}{4}=2\sigmaυνx\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,\sigmaυνx\end{aligned}$$

3.ii)

Να αποδείξετε ότι $\quad συν^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - συν^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2ημx\ συνx$

Λύση

$$συν^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - συν^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\left[συν\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - συν\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] + \left[συν\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + συν\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$\left[συνx\ συν\frac{\pi}{4} + ημx\ ημ\frac{\pi}{4} - συνx\ συν\frac{\pi}{4} + ημx\ ημ\frac{\pi}{4}\right] \bullet$$

$$\left[συνx\ συν\frac{\pi}{4} + ημx\ ημ\frac{\pi}{4} + συνx\ συν\frac{\pi}{4} - ημx\ ημ\frac{\pi}{4}\right] =$$

$$\left[2ημx\ ημ\frac{\pi}{4}\right]\left[2συνx\ συν\frac{\pi}{4}\right] =$$

$$2\ ημx\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2συνx\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 2ημx\ συνx$$

4.i)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$$ημ\frac{17\pi}{18}\ συν\frac{4\pi}{9} - συν\frac{17\pi}{18}\ ημ\frac{4\pi}{9}$$

Λύση

$$ημ\frac{17\pi}{18}\ συν\frac{4\pi}{9} - συν\frac{17\pi}{18}\ ημ\frac{4\pi}{9} = ημ\left(\frac{17\pi}{18} - \frac{4\pi}{9}\right)$$

$$= ημ\left(\frac{17\pi}{18} - \frac{8\pi}{18}\right)$$

$$= ημ\frac{9\pi}{18}$$

$$= ημ\frac{\pi}{2} = 1$$

4.ii)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$ημ\ 70^o\ \ συν\ 20^o + συν\ 70^o\ ημ\ 20^o$

Λύση

$ημ\ 70^o\ \ συν\ 20^o + συν\ 70^o\ ημ\ 20^o = ημ\ (70^o + 20^o) = ημ\ 90^o = 1$

4.iii)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1+\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}$$

Λύση

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1+\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}} = \varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right) = \varepsilon\varphi\ \frac{4\pi}{12} = \varepsilon\varphi\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

4.iv)

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή της παράστασης

$$\frac{\varepsilon\varphi165^0+\varepsilon\varphi15^0}{1-\varepsilon\varphi165^0\varepsilon\varphi15^0}$$

Λύση

$$\frac{\varepsilon\varphi165^0+\varepsilon\varphi15^0}{1-\varepsilon\varphi165^0\varepsilon\varphi15^0} = \varepsilon\varphi\ (165^o+15^o) = \varepsilon\varphi\ 180^o = 0$$

5.i)

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση ημ2x συνx + συν2x ημx

Λύση

ημ2x συνx + συν2x ημx = ημ(2x + x) = ημ3x

5.ii)

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\eta\mu x$$

Λύση

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\eta\mu x = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}-x\right) = \eta\mu\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

5.iii)

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση $\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi 2x}{1+\varepsilon\varphi x\ \varepsilon\varphi 2x}$

Λύση

$$\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi 2x}{1+\varepsilon\varphi x\ \varepsilon\varphi 2x} = \varepsilon\varphi(x-2x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$$

5.iv)

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)+\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{1-\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}$

Λύση

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}+2x+\frac{\pi}{6}-x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$= \varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$= \varepsilon\varphi\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

$$= -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sigma\varphi x$$

6.i)

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x$

Λύση

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu\frac{\pi}{3} + \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\eta\mu x\cdot\frac{1}{2} = \eta\mu x$$

6.ii)

Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta) = \eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

Λύση

$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta) = \eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta+\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta$ **(1)**

$\eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ το ζητούμενο.

7.

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 105^o και 195^o.

Λύση

$$\eta\mu 105^o = \eta\mu(60^o + 45^o) = \eta\mu\, 60^o\, \sigma\upsilon\nu\, 45^o + \sigma\upsilon\nu\, 60^o\, \eta\mu\, 45^o$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu 105^o = \sigma\upsilon\nu(60^o + 45^o) = \sigma\upsilon\nu\, 60^o\, \sigma\upsilon\nu\, 45^o - \eta\mu\, 60^o\, \eta\mu\, 45^o =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\varepsilon\varphi\, 105^o = \frac{\eta\mu 105^0}{\sigma\upsilon\nu 105^0} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2}$$

$$= -\frac{8+2.2\sqrt{3}}{4}$$

$$= -\frac{4(2+\sqrt{3})}{4} = -(2+\sqrt{3})$$

$$\sigma\varphi\, 105^o = \frac{1}{\varepsilon\varphi 105^0} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = -\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = -\frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = -2+\sqrt{3}$$

$$\eta\mu 195^o = \eta\mu(90^o + 105^o) = \eta\mu\, 90^o\, \sigma\upsilon\nu\, 105^o + \sigma\upsilon\nu\, 90^o\, \eta\mu\, 105^o$$

$$= 1\cdot\sigma\upsilon\nu\, 105^o + 0\cdot\eta\mu\, 105^o$$

$$= \sigma\upsilon\nu\, 105^o = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu 195^o = \sigma\upsilon\nu(90^o + 105^o) = \sigma\upsilon\nu\, 90^o\, \sigma\upsilon\nu 105^o - \eta\mu\, 90^o\, \eta\mu 105^o =$$

$$= 0\cdot\sigma\upsilon\nu\, 105^o - 1\cdot\eta\mu 105^o$$

$$= -\eta\mu 105^o = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$εφ195^o = \frac{ημ195^0}{συν195^0} = \frac{-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{6-2}$$

$$= \frac{8-2.2\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$$σφ\ 195^o = \frac{1}{εφ195^0} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

8.i)

Να αποδείξετε ότι $εφα + εφβ = \dfrac{ημ(α+β)}{συνα\ συνβ}$

Λύση

$$εφα + εφβ = \frac{ημα}{συνα} + \frac{ημβ}{συνβ}$$

$$= \frac{ημα\ συνβ + συνα\ ημβ}{συνα\ συνβ} = \frac{ημ(α+β)}{συνα\ συνβ}$$

8.ii)

Να αποδείξετε ότι $σφα + σφβ = \dfrac{ημ(α+β)}{ημα\ ημβ}$

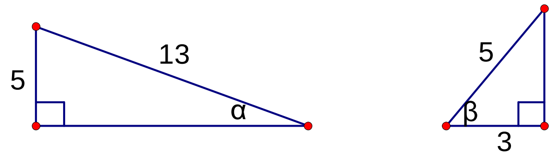
Λύση

$$σφα + σφβ = \frac{συνα}{ημα} + \frac{συνβ}{ημβ}$$

$$= \frac{ημβ\ συνα + ημα\ συνβ}{ημα\ ημβ} = \frac{ημ(α+β)}{ημα\ ημβ}$$

9.

Να αποδείξετε ότι για τις γωνίες α, β του διπλανού σχήματος ισχύει:



i) $ημ(α+β) = \dfrac{63}{65}$

ii) $συν(α+β) = \dfrac{16}{65}$

Λύση

Είναι $ημα = \dfrac{5}{13}$

$$συν^2α + ημ^2α = 1 \Rightarrow συν^2α = 1 - ημ^2α = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

Άρα $συνα = \dfrac{12}{13}$

Είναι $συνβ = \dfrac{3}{5}$

$$συν^2β + ημ^2β = 1 \Rightarrow ημ^2β = 1 - συν^2β = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Άρα $ημβ = \dfrac{4}{5}$

$$ημ(α+β) = ημα\,συνβ + συνα\,ημβ = \frac{5}{13}\frac{3}{5} + \frac{12}{13}\frac{4}{5} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

$$συν(α+β) = συνα\,συνβ - ημα\,ημβ = \frac{12}{13}\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\frac{4}{5} = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$$

10.i)

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha+\beta$, αν

$\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}$

$$\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

Άρα $\eta\mu\beta = \frac{12}{13}$

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5}\,\frac{12}{13} = -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta = \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{3}{5}\,\frac{12}{13} = -\frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{56}{65}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = -\frac{33}{56}$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{1}{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)} = -\frac{56}{33}$$

10.ii)

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha + \beta$, αν

$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Άρα $\eta\mu\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{3}{5}$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta = -\frac{4}{5}\,\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta = -\frac{3}{5}\,\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25}$$

$$= -\frac{25}{25} = -1$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$\sigma\varphi(\alpha + \beta)$ δεν ορίζεται.

11.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Λύση

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - \eta\mu x\ \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \eta\mu x\ \frac{1}{2}$$

$$2\eta\mu x = \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$3\eta\mu x = \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x \qquad \textbf{(1)}$$

Αν ήταν $\sigma\upsilon\nu x = 0$, από την (1) θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$.

Αλλά $\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$, οπότε $0^2 + 0^2 = 1$ δηλαδή $0 = 1$ που είναι άτοπο

Άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$

Η (1) $\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

11.ii)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = -2$

Λύση

Για να ορίζεται η $\varepsilon\varphi x$ και η $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, πρέπει

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{4} + x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4} + x) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi x + \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\ \varepsilon\varphi x} = -2$$

$$\varepsilon\varphi x + \frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\ \varepsilon\varphi x} = -2$$

$$\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi^2 x + 1 + \varepsilon\varphi x = -2 + 2\varepsilon\varphi x$$

$$\varepsilon\varphi^2 x = 3$$

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$$

- $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

11.iii)

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi(x-\alpha) = -2$, αν $\varepsilon\varphi\alpha = -3$

Λύση

Για να ορίζεται η $\varepsilon\varphi(x-\alpha)$, πρέπει $x - \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon\varphi(x-\alpha) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi x\ \varepsilon\varphi\alpha} = -2$$

$$\frac{\varepsilon\varphi x + 3}{1-3\varepsilon\varphi x} = -2$$

$$\varepsilon\varphi x + 3 = -2 + 6\varepsilon\varphi x$$

$$5\varepsilon\varphi x = 5$$

$$\varepsilon\varphi x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι $\frac{ημ(α-β)}{συνα\ συνβ} + \frac{ημ(β-γ)}{συνβ\ συνγ} + \frac{ημ(γ-α)}{συνγ\ συνα} = 0$

Λύση

$$\frac{ημ(α-β)}{συνα\ συνβ} = \frac{ημα\ συνβ\ -\ συνα\ ημβ}{συνα\ συνβ}$$

$$= \frac{ημα\ συνβ}{συνα\ συνβ} - \frac{συνα\ ημβ}{συνα\ συνβ} = εφα - εφβ \quad \textbf{(1)}$$

Ομοίως και κυκλικά θα έχουμε

$$\frac{ημ(β-γ)}{συνβ\ συνγ} = εφβ - εφγ \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{ημ(γ-α)}{συνγ\ συνα} = εφγ - εφα \quad \textbf{(3)}$$

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $\frac{ημ(α-β)}{συνα\ συνβ} + \frac{ημ(β-γ)}{συνβ\ συνγ} + \frac{ημ(γ-α)}{συνγ\ συνα} = 0$

2.

Αν συν(α + β) = 0, να αποδείξετε ότι ημ(α + 2 β) = ημα

Λύση

$συν(α + β) = 0 \quad \Rightarrow \quad α + β = kπ + \frac{π}{2},\ \ k\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow$

$$β = kπ + \frac{π}{2} - α \quad \Rightarrow \quad 2β = 2kπ + π - 2α$$

$ημ(α + 2\,β) = ημ(α + 2kπ + π - 2α) = ημ(π - α) = ημα$

3.

Αν $εφα = –3$, να λύσετε στο $[0, 2π]$ την εξίσωση $ημ(x – α) = –2\, ημ(x + α)$

Λύση

$ημ(x – α) = –2\, ημ(x + α) \quad \Leftrightarrow$

$ημx\, συνα – συνx\, ημα = –2\, (ημx\, συνα + συνx\, ημα) \quad \Leftrightarrow$

$ημx\, συνα – συνx\, ημα = –2ημx\, συνα – 2συνx\, ημα \quad \Leftrightarrow$

$3\, ημx\, συνα = –\, συνx\, ημα$ **(1)**

Αν ήταν $συνx = 0$, από την (1) θα είχαμε και $ημx = 0$.
Αλλά $συν^2x + ημ^2x = 1$, οπότε $0^2 + 0^2 = 1$ δηλαδή $0 = 1$ που είναι άτοπο
Άρα $συνx \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 3\dfrac{ημx}{συνx} = -\dfrac{ημα}{συνα} \Leftrightarrow 3εφx = –\, εφα$

$3εφx = 3 \Leftrightarrow εφx = 1$

$εφx = εφ\dfrac{π}{4}$

$εφx = εφ\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow x = kπ + \dfrac{π}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ **(2)**

$x \in [0, 2π] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2π$

$0 \leq kπ + \dfrac{π}{4} \leq 2π$

$0 \leq k + \dfrac{1}{4} \leq 2$

$0 \leq 4k + 1 \leq 8$

$–1 \leq 4k \leq 8 – 1$

$–1 \leq 4k \leq 7$

$-\dfrac{1}{4} \leq k \leq \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow k = 0$ ή $k = 1$

$(2) \Leftrightarrow x = 0\cdot π + \dfrac{π}{4} = \dfrac{π}{4}$ ή $x = 1π + \dfrac{π}{4} = \dfrac{5π}{4}$

4.

Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι $(1 + \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \varepsilon\varphi\beta) = 2$

Λύση

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta} = 1$

$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = 1 - \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta$

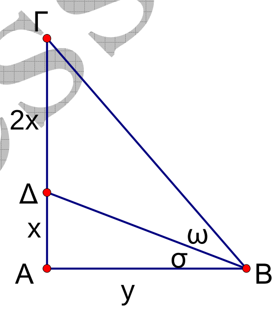
$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta = 1$

$1 + \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta = 2$

$(1 + \varepsilon\varphi\alpha) + \varepsilon\varphi\beta(1 + \varepsilon\varphi\alpha) = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 + \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \varepsilon\varphi\beta) = 2$

5.

Αν στο διπλανό σχήμα είναι $A\Gamma = 3\cdot A\Delta$, να αποδείξετε ότι:



i) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2\varepsilon\varphi B}{3 + \varepsilon\varphi^2 B}$

ii) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, αν $B = 60^o$.

Λύση

i)

Έστω $AB = y$ και $A\Delta = x$ οπότε $A\Gamma = 3x$

$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(B - \sigma) = \frac{\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\sigma}{1 + \varepsilon\varphi B\ \varepsilon\varphi\sigma}$ **(1)**

$\varepsilon\varphi\sigma = \frac{x}{y} = \frac{1}{3}\frac{3x}{y} = \frac{1}{3}\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{3}\varepsilon\varphi B$

$(1) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi B - \frac{1}{3}\varepsilon\varphi B}{1 + \varepsilon\varphi B\ \frac{1}{3}\varepsilon\varphi B} = \frac{\frac{3\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi B}{3}}{\frac{3 + \varepsilon\varphi^2 B}{3}} = \frac{2\varepsilon\varphi B}{3 + \varepsilon\varphi^2 B}$

ii)

Από (i) $\Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{2\varepsilon\varphi 60^0}{3 + \varepsilon\varphi^2 60^0} = \frac{2\sqrt{3}}{3+3} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi\ 30^o \quad \Rightarrow \quad \omega = 30^o$

άρα και $\sigma = 30^o$ δηλαδή ΒΔ διχοτόμος.

6.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{\eta\mu A + \eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)} = \varepsilon\varphi B$, να αποδείξετε ότι $A = \dfrac{\pi}{2}$ και αντιστρόφως.

Λύση

Επειδή Α, Β + Γ παραπληρωματικές, είναι ημΑ = ημ(Β + Γ)

$$\frac{\eta\mu A + \eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)} = \varepsilon\varphi B \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu(B+\Gamma) + \eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)} = \varepsilon\varphi B \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma + \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B\eta\mu\Gamma} = \varepsilon\varphi B \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B\eta\mu\Gamma} = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B\eta\mu\Gamma} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu B} \quad \Leftrightarrow$$

$2\sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma - \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B + \Gamma = \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = \dfrac{\pi}{2}$

8.

Να λυθεί στο διάστημα $[0, \pi]$ η εξίσωση: $εφ\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - εφ\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2\sqrt{3}$

Λύση

Για να ορίζονται οι $εφ\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, $εφ\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, πρέπει

$\frac{\pi}{4} + x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{4} - x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$εφ\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - εφ\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{εφ\frac{\pi}{4}+εφx}{1-εφ\frac{\pi}{4}\ εφx} - \frac{εφ\frac{\pi}{4}-εφx}{1+εφ\frac{\pi}{4}\ εφx} = 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+εφx}{1-εφx} - \frac{1-εφx}{1+εφx} = 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$(1+εφx)^2 - (1-εφx)^2 = 2\sqrt{3}\ (1 - εφx)(1 + εφx) \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + 2εφx + εφ^2x - (1 - 2εφx + εφ^2x) = 2\sqrt{3} (1 - εφ^2x) \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + 2εφx + εφ^2x - 1 + 2εφx - εφ^2x) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\ εφ^2x \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{3}\ εφ^2x + 4\ εφx - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot(-2\sqrt{3}) = 16 + 48 = 64$$

$$εφx = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{2.2\sqrt{3}} = \frac{-4\pm 8}{4\sqrt{3}} = \frac{-4+8}{4\sqrt{3}} \text{ ή } \frac{-4-8}{4\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{4\sqrt{3}} \text{ ή } \frac{-12}{4\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ή } \frac{-3}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } -\frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } -\sqrt{3}$$

- $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $x \in [0, \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$
- $εφx = -\sqrt{3}$ και $x \in [0, \pi] \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$