1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 27 – 28

Α΄ Ομάδας

1.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 2 = 0$: $\Delta = 1 + 8 = 9$, $x = \dfrac{1 \pm 3}{2} = 2$ ή -1

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad ή \quad x = -1 \\ \quad y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - x \end{cases} ή \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} ή \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος : $(2, -1)$, $(-1, 2)$

2.

Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα

Λύση

i)

$$\begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3\cdot 3x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Ρίζες της εξίσωσης $9x^2 - 12x + 4 = 0$: $\Delta = 144 - 144 = 0$.

Άρα έχουμε διπλή ρίζα $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ διπλή λύση .}$$

Χαράζουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = 3x^2$ και της ευθείας $12x - 3y = 4$.

Επειδή το σύστημα έχει διπλή λύση, η ευθεία θα εφάπτεται της παραβολής με σημείο επαφής το $K\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

ii)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{9}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = x \end{cases}$$

Λύσεις του συστήματος : $K\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\Lambda\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Χαράζουμε τη γραφική παράσταση του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ και της ευθείας $x - y = 0$. Επειδή το σύστημα έχει δύο λύσεις , ο κύκλος και η ευθεία θα τέμνονται στα σημεία Κ, Λ.

iii)

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=5 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{4}{x^2}=5 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+4=5x^2 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Ρίζες της εξίσωσης $x^4+4=5x^2 \Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$

$x^2=1$ ή $x^2=4$

$x=1$ ή $x=-1$ ή $x=2$ ή $x=-2$

(1) $\Leftrightarrow$ Κ(1, 2) , Λ(–1, –2) , Μ(2, 1) , Ν(–2, –1)

Χαράζουμε τη γραφική παράσταση του κύκλου $x^2+y^2=5$ και της υπερβολής $y=\dfrac{2}{x}$. Επειδή το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις , ο κύκλος και η υπερβολή θα τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν

3.

Από τους τύπους $S=\upsilon_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$ και $\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$, να δείξετε ότι $S=\dfrac{\upsilon+\upsilon_0}{2}\cdot t$

Λύση

$S=\upsilon_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2 \Leftrightarrow 2S=2\upsilon_0 t+\alpha t^2$ (απαλοιφή του α)

$2S-2\upsilon_0 t=\alpha t^2$

$\alpha=\dfrac{2S-2\upsilon_0 t}{t^2}$

$\upsilon=\upsilon_0+\alpha t \Leftrightarrow \upsilon=\upsilon_0+\dfrac{2S-2\upsilon_0 t}{t^2}\cdot t$

$\upsilon=\upsilon_0+\dfrac{2S-2\upsilon_0 t}{t}$

$\upsilon t=\upsilon_0 t+2S-2\upsilon_0 t$

$\upsilon t+\upsilon_0 t=2S$

$(\upsilon+\upsilon_0)t=2S$

$\dfrac{\upsilon+\upsilon_0}{2}\cdot t=S$

Β΄ Ομάδας

1.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 = 2y+10 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα .

Λύση

$$\begin{cases} x^2 = 2y+10 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y+10 \\ 2y+10+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y+10 \\ y^2+2y-15=0 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Ρίζες της εξίσωσης $y^2 + 2y - 15 = 0$: $\Delta = 4 + 60 = 64$, $y = \dfrac{-2\pm 8}{2} = 3$ ή -5

- Όταν $y = 3$
  $x^2 = 2y + 10 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$
  Λύσεις του συστήματος : $K(4, 3)$, $\Lambda(-4, 3)$

- Όταν $y = -5$
  $x^2 = 2y + 10 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (διπλή ρίζα)
  Λύση (διπλή) του συστήματος : $M(0, -5)$

Η εξίσωση $x^2 = 2y + 10$ γράφεται $2y = x^2 - 10 \Leftrightarrow$
$y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5$ που παριστάνει παραβολή

Χαράζουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$.

Επειδή το σύστημα έχει τρεις λύσεις , ο κύκλος και η παραβολή θα έχουν κοινά τα σημεία K, Λ, M, από τα οποία το M είναι σημείο επαφής.

2.

Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \quad ή \quad 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

- $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \quad ή \quad x = 3 \end{cases}$

  Λύσεις του συστήματος : (1, 0) , (3, 0)

- $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 0 = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 2 \quad ή \quad x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 2 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Λύσεις του συστήματος : (2, –1) , (4, 3)

3.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι $120\,cm^2$. Αν η μία διάσταση του ορθογωνίου αυξηθεί κατά 3cm , ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά 2cm, τότε το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση

Έστω x, y οι διαστάσεις. Τότε $xy = 120$ και $(x + 3)(y - 2) = 120$

$xy = 120$ και $xy - 2x + 3y - 6 = 120$

$xy = 120$ και $120 - 2x + 3y - 6 = 120$

$xy = 120$ και $3y = 2x + 6$

$y = \frac{120}{x}$ και $3\frac{120}{x} = 2x + 6$

$y = \frac{120}{x}$ και $360 = 2x^2 + 6x$

$y = \frac{120}{x}$ και $x^2 + 3x - 180 = 0$

Ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x - 180 = 0$: $\Delta = 9 + 720 = 729$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2} = 12$$

Από την εξίσωση $y = \frac{120}{x}$ παίρνουμε $y = \frac{120}{12} = 10$

Επομένως , οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 12cm , 10cm.

4.

Δίνεται η παραβολή $y = -x^2$ και η ευθεία $y = 2x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

Λύση

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ y = -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + k \\ 2x + k = -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + k \\ x^2 + 2x + k = 0 \end{cases}$$

Η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία $\Leftrightarrow$

το σύστημα έχει δύο λύσεις $\Leftrightarrow$

η εξίσωση $x^2 + 2x + k = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες $\Leftrightarrow$ $\Delta > 0$

$4 - 4k > 0$

$1 - k > 0 \Leftrightarrow k < 1$

5.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα .

Λύση

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + \mu) = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2\mu = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2\mu = 0 \\ y = x + \mu \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 2\mu$ είναι $\Delta = 4 + 8\mu$

- Όταν $\Delta > 0$, δηλαδή $4 + 8\mu > 0$
  $8\mu > -4$
  $\mu > -\frac{1}{2}$

  Τότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 2\mu = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8\mu}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+2\mu}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+2\mu}$

  Και η εξίσωση $y = x + \mu \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{1+2\mu} + \mu$

  Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις , επομένως η ευθεία $y = x + \mu$ τέμνει την παραβολή $2y = x^2$ $(y = \frac{1}{2}x^2)$ σε δύο σημεία.

- Όταν $\Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$

  Τότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 2\mu = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2} = 1$ διπλή ρίζα

  Και η εξίσωση $y = x + \mu \Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

  Άρα το σύστημα έχει μία διπλή λύση $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, επομένως η ευθεία $y = x + \mu$ εφάπτεται της παραβολής στο σημείο $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

- Όταν $\Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$

  Τότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 2\mu = 0$ είναι αδύνατη.
  Άρα και το σύστημα είναι αδύνατο, επομένως η ευθεία $y = x + \mu$ δεν έχει κοινό σημείο με την παραβολή