1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 21 – 23

Α΄ Ομάδας

1.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

i) αλγεβρικά **ii)** γραφικά

Λύση

i)

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+y \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=4+y \\ 4+y+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=4+y \\ 2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=4+y \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-1 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

ii)

$x-y=4 \Leftrightarrow y=x-4$ παριστάνει ευθεία ε_1

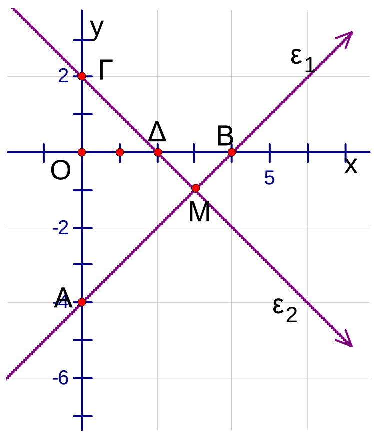
Για $x=0 \Rightarrow y=-4$ Σημείο Α(0, – 4)

Για $y=0 \Rightarrow x=4$ Σημείο Β(4, 0)

$x+y=2 \Leftrightarrow y=-x+2$ παριστάνει ευθεία ε_2

Για $x=0 \Rightarrow y=2$ Σημείο Γ(0, 2)

Για $y=0 \Rightarrow x=2$ Σημείο Δ(2, 0)



Η γραφική λύση του συστήματος είναι το σημείο τομής Μ των ευθειών ε_1, ε_2

2.

Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} \\ x+y = 45 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases}$

Λύση

i)

$$\begin{cases} \frac{x}{7}=\frac{y}{8} \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7y}{8} \\ x+y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{7y}{8} \\ \frac{7y}{8}+y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{7y}{8} \\ 7y+8y=360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{7y}{8} \\ 15y=360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7\cdot 24}{8} \\ y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=24 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=3y-6 \\ 4x+3y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-3y=-2 \\ 4x+3y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (+) \quad 8x=6 \\ (-) \quad 6y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

3.

Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{7}+2=0 \\ \dfrac{x+6}{3}-\dfrac{y-6}{2}=8 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}=4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$

Λύση

i)

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{7}+2=0 \\ \dfrac{x+6}{3}-\dfrac{y-6}{2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-35+4y+2+28=0 \\ 2x+12-3y+18=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=18 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-21-8=-29 \qquad D_x=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 18 & -3 \end{vmatrix}=-15-72=-87$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}=126-10=116$$

$$(1) \Leftrightarrow (x,\, y)=\left(\frac{D_x}{D},\, \frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-87}{-29},\, \frac{116}{-29}\right)=(3,\, -4)$$

ii)

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}=4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-4=48-3y-6 \\ 3x+9-18=2x-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+3y=46 \\ x+2y=9 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=16-3=13 \qquad D_x=\begin{vmatrix} 46 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}=92-27=65$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 8 & 46 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=72-46=26$$

$$(1) \Leftrightarrow (x,\, y)=\left(\frac{D_x}{D},\, \frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{65}{13},\, \frac{26}{13}\right)=(5,\, 2)$$

4.

Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \frac{x}{3}-y=-2 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2y=x+2 \\ \frac{1}{2}x-y+1=0 \end{cases}$

Λύση

i)

$$\begin{cases} x-3y=3 \\ \frac{x}{3}-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+3 \\ x-3y=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y+3 \\ 3y+3-3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+3 \\ 3=-6 \end{cases}$$ αδύνατο

ii)

$$\begin{cases} 2y=x+2 \\ \frac{1}{2}x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=x+2 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y=x+2 \\ x=2y-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y=2y-2+2 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y-2$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , τις $(x, y) = (2y-2 , y)$ με $y \in \mathbb{R}$

5.

Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών

i) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

Λύση

i)

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13$ $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$

$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{-39}{-13}, \frac{-13}{-13}\right) = (3, 1)$

ii)

$\begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11$ $D_x = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 2 = -22$

$D_y = \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11$

$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{-22}{-11}, \frac{11}{-11}\right) = (2, -1)$

6.

Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.

i) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 6x+7y=100 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2x-3y=40 \\ 4x-6y=80 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} 3x+\ \ y=11 \\ -9x-3y=2 \end{cases}$

Λύση

i)

$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μία μόνο λύση

ii)

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις

$D_x = \begin{vmatrix} 40 & -3 \\ 80 & -6 \end{vmatrix} = -240 + 240 = 0,$ $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 4 & 80 \end{vmatrix} = 160 - 160 = 0$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

iii)

$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -33 - 2 = -35 \neq 0$ $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 99 = 105 \neq 0$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο

7.

Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y = -2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y = -1-\sqrt{3} \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+4y = 7 \\ \frac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y = 1 \end{cases}$

Λύση

i)

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} = 3-1-2 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} = -2(\sqrt{3}+1)-2(-1-\sqrt{3}) = -2(\sqrt{3}+1-1-\sqrt{3})$$
$$= -2\cdot 0 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & -2 \\ 1 & -1-\sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{3}-1)(-1-\sqrt{3}) + 2$$
$$= -(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3}) + 2$$
$$= -(3-1)+2 = -2+2 = 0$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Το σύστημα $\Leftrightarrow$ $x+(\sqrt{3}+1)y = -1-\sqrt{3}$

$x = -(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)y$

$x = -(1+\sqrt{3})(1+y)$

Άρα $(x, y) = \left(-\left(1+\sqrt{3}\right)(1+y),\ y\right),\quad y\in\mathbb{R}$

ii)

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = 3-1-2 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = 7\sqrt{3}-7-4 = 7\sqrt{3}-11 \neq 0$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο

8.

Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 3x-2y-\omega=11 \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ 5x+y-2\omega=33 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 5x-y+3\omega=4 \\ x-3y+\omega=2 \\ 3x-2y+2\omega=2 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}-2\omega=3 \\ \dfrac{3x}{2}+y+\omega=5 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases}$

Λύση

i)

$$\begin{cases} 3x-2y-\omega=11 & (1) \\ 2x-5y-2\omega=3 & (2) \\ 5x+y-2\omega=33 & (3) \end{cases} \underset{(3)-(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-2y-11=\omega \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ 3x+6y=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-2y-11=\omega \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ x+2y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=3(10-2y)-2y-11 \\ 2(10-2y)-5y-2\omega=3 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=30-6y-2y-11 \\ 20-4y-5y-2\omega=3 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=19-8y \\ -9y-2\omega=-17 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=19-8y \\ 9y+2(19-8y)=17 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=19-8y \\ 9y+38-16y=17 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=19-8y \\ -7y=-21 \\ x=10-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=19-8.3 \\ y=3 \\ x=10-2.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=-5 \\ y=3 \\ x=4 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} 5x-y+3\omega=4 \\ x-3y+\omega=2 \\ 3x-2y+2\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y+3\omega=4 \\ x=2+3y-\omega \\ 3x-2y+2\omega=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(2+3y-\omega)-y+3\omega=4 \\ x=2+3y-\omega \\ 3(2+3y-\omega)-2y+2\omega=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10+15y-5\omega-y+3\omega=4 \\ x=2+3y-\omega \\ 6+9y-3\omega-2y+2\omega=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y-2\omega=-6 \\ x=2+3y-\omega \\ 7y-\omega=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y-\omega=-3 \\ x=2+3y-\omega \\ 7y-\omega=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y-\omega=-3 \\ x=2+3y-\omega \\ -3=-4 \end{cases} \quad \text{αδύνατο}$$

iii)

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2}-2\omega=3 \\ \frac{3x}{2}+y+\omega=5 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4\omega=6 \\ 3x+2y+2\omega=10 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-2x+4\omega \\ 3x+2y+2\omega=10 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-2x+4\omega \\ 3x+2(6-2x+4\omega)+2\omega=10 \\ 5x+3(6-2x+4\omega)-2\omega=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-2x+4\omega \\ 3x+12-4x+8\omega+2\omega=10 \\ 5x+18-6x+12\omega-2\omega=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-2x+4\omega \\ -x+10\omega=-2 \\ -x+10\omega=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-2x+4\omega \\ x=10\omega+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-2(10\omega+2)+4\omega \\ x=10\omega+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6-20\omega-4+4\omega \\ x=10\omega+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-16\omega \\ x=10\omega+2 \end{cases}$$

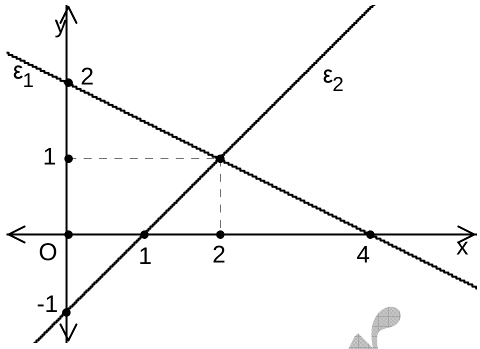
Άρα $(x, y, \omega) = (10\omega + 2, \ 2 - 16\omega, \ \omega)$ με $\omega \in \mathbb{R}$

Β΄ Ομάδας

1.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του διπλανού σχήματος

ii) Ποιο σύστημα ορίζουν οι ε_1 και ε_2 και ποια είναι η λύση του συστήματος;



Λύση

i)

Έστω $\varepsilon_1:\ y=\alpha_1 x+\beta_1$

Το σημείο $(4,0)\in\varepsilon_1 \Leftrightarrow 0=\alpha_1\cdot 4+\beta_1$

$\beta_1=-4\alpha_1$ **(1)**

Το σημείο $(0,2)\in\varepsilon_1 \Leftrightarrow 2=\alpha_1\cdot 0+\beta_1 \Leftrightarrow \beta_1=2$

Η (1) $\Leftrightarrow\ 2=-4\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1=-\frac{1}{2}$

Άρα $\varepsilon_1:\ y=-\frac{1}{2}x+2 \Leftrightarrow 2y=-x+4 \Leftrightarrow x+2y=4$

Ομοίως βρίσκουμε $\varepsilon_2:\ x-y=1$

ii)

Το σύστημα : $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$ Η λύση : $(x, y) = (2, 1)$

2.

Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια . Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

Λύση

Έστω x το πλήθος των δίκλινων και y το πλήθος των τρίκλινων δωματίων.

Τότε $\begin{cases} x+y=26 \\ 2x+3y=68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=26-x \\ 2x+3y=68 \end{cases}$

$\begin{cases} y=26-x \\ 2x+3(26-x)=68 \end{cases}$

$\begin{cases} y=26-x \\ 2x+78-3x=68 \end{cases}$

$\begin{cases} y=26-x \\ -x=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=26-x \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16 \\ x=10 \end{cases}$

3.

Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4 €. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

Λύση

Έστω x το πλήθος των παιδιών και y το πλήθος των ενηλίκων.

Τότε $\begin{cases} x+y=2200 \\ 1,5x+4y=5050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2200-x \\ 1,5x+4y=5050 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=2200-x \\ 1,5x+4(2200-x)=5050 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2200-x \\ 1,5x+8800-4x=5050 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2200-x \\ -2,5x=-3750 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2200-x \\ x=1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=700 \\ x=1500 \end{cases}$$

4.

Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο $R = \alpha T + \beta$. Αν στους 20^{o} C η αντίσταση ήταν 0,4 Ω και στους 80^{o} C ήταν 0,5 Ω, να βρείτε τα α, β.

Λύση

Η εξίσωση $R = \alpha T + \beta$ επαληθεύεται για T = 20, R = 0,4 $\Rightarrow$ 0,4 = α.20+β **(1)**

Η εξίσωση $R = \alpha T + \beta$ επαληθεύεται για T = 80, R = 0,5 $\Rightarrow$ 0,5 = α.80 +β **(2)**

Σύστημα των (1), (2). $\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0{,}4 \\ 80\alpha + \beta = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha + \beta = 0{,}4 \\ (-) : 60\alpha = 0{,}1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0{,}4 \\ \alpha = \dfrac{1}{600} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0{,}4 \\ \alpha = \dfrac{1}{600} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20\dfrac{1}{600} + \beta = 0{,}4 \\ \alpha = \dfrac{1}{600} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{4}{10} - \dfrac{1}{30} \\ \alpha = \dfrac{1}{600} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{11}{30} \\ \alpha = \dfrac{1}{600} \end{cases}$$

5.
Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ . Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ ;

Λύση

Έστω x, y οι ζητούμενες ποσότητες , αντίστοιχα

Από το πρώτο παίρνει $x\frac{50}{100}$ υδρ. οξύ και από το δεύτερο $y\frac{80}{100}$

Το νέο διάλυμα θα περιέχει $x\frac{50}{100} + y\frac{80}{100}$ υδρ.οξύ **(1)**

Η συνολική ποσότητα του νέου διαλύματος είναι x + y = 100 και θέλουμε να είναι περιεκτικότητας 68% σε υδρ.οξύ . Άρα θα περιέχει $100\frac{68}{100}$ υδρ.οξύ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $x\frac{50}{100} + y\frac{80}{100} = 100\frac{68}{100}$

$$50x + 80y = 6800$$

$$5x + 8y = 680$$

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 5x+8y=680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=100-x \\ 5x+8y=680 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=100-x \\ 5x+8(100-x)=680 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=100-x \\ 5x+800-8x=680 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=100-x \\ 3x=120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=100-x \\ x=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=60 \\ x=40 \end{cases}$$

6.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\ 2x+4y=3$ και $\varepsilon_2:\ x+2y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2.

ii) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;

iii) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι ευθείες είναι παράλληλες;

Λύση

i)

$2x+4y=3 \iff 4y=-2x+3 \iff y=-\frac{2}{4}x+\frac{3}{4}$, άρα $\lambda_1=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

$x+2y=\alpha \iff 2y=-x+\alpha \iff y=-\frac{1}{2}x+\frac{\alpha}{2}$, άρα $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

ii)

Επειδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι $\lambda_1=\lambda_2$, οι ευθείες συμπίπτουν ή είναι παράλληλες.
Άρα δεν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται.

iii)

Πρέπει $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{3}{4} \iff 4\alpha\neq 6 \iff \alpha\neq\frac{3}{2}$

7.

Να βρείτε , για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα κοινά σημεία των ευθειών :

i) $\varepsilon_1 : \ \alpha x + y = \alpha^2$ και $\varepsilon_2 : \ x + \alpha y = 1$

ii) $\varepsilon_1 : \ \alpha x - y = \alpha$ και $\varepsilon_2 : \ x + \alpha y = 1$

Λύση

i)

Σύστημα των ε_1, ε_2 : $\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = -\alpha(\alpha - 1)$$

- Όταν $D \neq 0$, δηλαδή όταν $(\alpha - 1)(\alpha + 1) \neq 0$
  $\alpha - 1 \neq 0$ και $\alpha + 1 \neq 0$
  $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$,

  τότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x, y) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)$
  $= \left(\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}, \dfrac{-\alpha}{\alpha + 1}\right)$

  Άρα οι ε_1, ε_2 έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\left(\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}, \dfrac{-\alpha}{\alpha + 1}\right)$

- Όταν $D = 0$, δηλαδή όταν $(\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0$
  $\alpha - 1 = 0$ ή $\alpha + 1 = 0$
  $\alpha = 1$ ή $\alpha = -1$,

  τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

  1) Για $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1$.

  Οπότε οι ε_1, ε_2 έχουν όλα τα σημεία κοινά. (συμπίπτουν)

  2) Για $\alpha = -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

  $\begin{cases} x - y = -1 \\ -1 = 1 \end{cases}$ αδύνατο

  Οπότε οι ε_1, ε_2 δεν έχουν κοινό σημείο, άρα είναι παράλληλες

ii)

Σύστημα των ε_1, ε_2 : $\begin{cases} \alpha x - y = \alpha \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ τη $(x, y) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D} \right)$ **(1)**

$D_x = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1$, $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha = 0$

$(1) \Rightarrow (x, y) = \left(\dfrac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 1}, \dfrac{0}{\alpha^2 + 1} \right) = (1, 0).$

Άρα ε_1, ε_2 έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(1, 0)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.

Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} (\lambda-1)x-2y=1 \\ 4x-(\lambda+1)y=-2 \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ **ii)** $\begin{cases} (\mu-2)x+5y=5 \\ x+(\mu+2)y=5 \end{cases}$, $\mu\in\mathbb{R}$

Λύση

i)

$$D=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 4 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda^2-1)+8=-\lambda^2+1+8=9-\lambda^2$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -\lambda-1-4=-\lambda-5$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)-4=-2\lambda+2-4=-2\lambda-2$$

$$D=0 \Leftrightarrow 9-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=3 \text{ ή } \lambda=-3$$

- Όταν $\lambda\neq 3$ και $\lambda\neq -3$ δηλαδή όταν $D\neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-\lambda-5}{9-\lambda^2}$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-2\lambda-2}{9-\lambda^2}$

- Όταν $\lambda=3$ ή $\lambda=-3$ δηλαδή όταν $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.
  - αν μεν $\lambda=3$, το σύστημα γίνεται
    $\begin{cases} (3-1)x-2y=1 \\ 4x-(3+1)y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=1 \\ 4x-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=1 \\ 2x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow 1=-1$
    το σύστημα είναι αδύνατο
  - αν δε $\lambda=-3$, το σύστημα γίνεται
    $\begin{cases} (-3-1)x-2y=1 \\ 4x-(-3+1)y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=-1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow -1=-2$
    το σύστημα είναι πάλι αδύνατο.

ii)

$$D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = \mu^2 - 4 - 5 = \mu^2 - 9 = (\mu - 3)(\mu + 3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5\mu + 10 - 25 = 5\mu - 15 = 5(\mu - 3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\mu - 10 - 5 = 5\mu - 15 = 5(\mu - 3)$$

$D = 0 \iff \mu^2 - 9 = 0 \qquad \mu^2 = 9 \qquad \mu = 3$ ή $\mu = -3$

- Όταν $\mu \neq 3$ και $\mu \neq -3$ δηλαδή όταν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)} = \dfrac{5}{\mu+3}$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)} = \frac{5}{\mu+3}$$

- Όταν $\mu = 3$ ή $\mu = -3$ δηλαδή όταν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.
  - αν μεν $\mu = 3$, το σύστημα γίνεται

    $$\begin{cases} (3-2)x+5y=5 \\ x+(3+2)y=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x+5y=5 \\ x+5y=5 \end{cases} \iff x + 5y = 5 \iff x = 5 - 5y$$

    το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τις $(x, y) = (5 - 5y,\ y)$ με $y \in \mathbb{R}$

  - αν δε $\mu = -3$, το σύστημα γίνεται

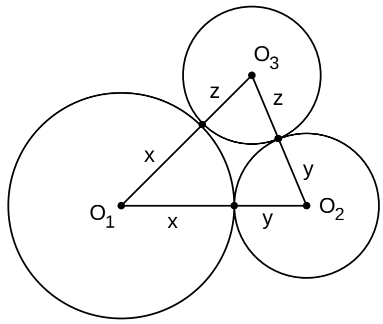
    $$\begin{cases} (-3-2)x+5y=5 \\ x+(-3+2)y=5 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x+5y=5 \\ x-y=5 \end{cases}$$

    $$\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$$

    $$\begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=5 \end{cases} \Rightarrow -1 = 5 \quad \text{αδύνατο}$$

9.

Οι κύκλοι του διπλανού σχήματος εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ισχύει $O_1 O_2 = 6$, $O_1 O_3 = 5$ και $O_2 O_3 = 7$. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των τριών κύκλων.



Λύση

Έστω x, y, z οι ακτίνες των κύκλων.

Τότε $x + y = 6$ **(1)**

$y + z = 7$ **(2)**

$z + x = 5$ **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $2x + 2y + 2z = 18$ $\Rightarrow$ $x + y + z = 9$ **(4)**

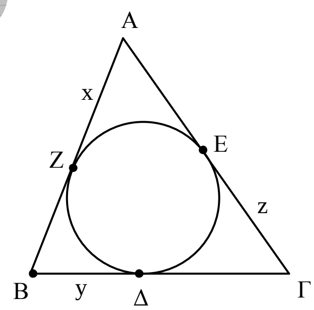
(4) – (1) $\Rightarrow$ $z = 3$

(4) – (2) $\Rightarrow$ $x = 2$

(4) – (3) $\Rightarrow$ $y = 4$

10.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τον εγγεγραμμένο του κύκλο που εφάπτεται των πλευρών στα σημεία Δ, Ε και Ζ. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΖ = x, ΒΔ = y και ΓΕ = z, συναρτήσει των πλευρών α, β και γ.



Λύση

Είναι ΒΔ = ΒΖ = y, ΓΔ = ΓΕ = z, ΑΕ = ΑΖ = x

$$\begin{cases} x + y = \gamma & (1) \\ y + z = \alpha & (2) \\ z + x = \beta & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $2x + 2y + 2z = \alpha+\beta+\gamma$ $\Rightarrow$ $x + y + z = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ **(4)**

(4) – (1) $\Rightarrow$ $z = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$

(4) – (2) $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - \alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$

(4) – (3) $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)$

11.

Ένας χημικός έχει τρία διαλύματα από το ίδιο οξύ. Το πρώτο περιέχει 50% οξύ , το δεύτερο 10% οξύ και το τρίτο 30% οξύ. Ο χημικός θέλει να παρασκευάσει 52 lit διάλυμα περιεκτικότητας 32% σε οξύ , χρησιμοποιώντας και τα τρία διαλύματα και μάλιστα η ποσότητα του πρώτου διαλύματος να είναι διπλάσια από την ποσότητα του τρίτου διαλύματος. Να βρείτε πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα θα χρησιμοποιήσει.

Λύση

Έστω ότι θα χρησιμοποιήσει x lit από το 1^{o} , y lit από το 2^{o} και z lit από το 3^{o} .

Τότε $x + y + z = 52$ **(1)** και $x = 2z$ **(2)**

Το νέο διάλυμα θα περιέχει $x\dfrac{50}{100} + y\dfrac{10}{100} + z\dfrac{30}{100}$ lit οξύ $= 52\dfrac{32}{100} \Leftrightarrow$

$$50x + 10y + 30z = 1664 \quad \textbf{(3)}$$

$$(1), (2), (3):\ \begin{cases} x+y+z=52 \\ x=2z \\ 50x+10y+30z=1664 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z+y+z=52 \\ x=2z \\ 50\cdot 2z+10y+30z=1664 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=52-3z \\ x=2z \\ 130z+10y=1664 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=52-3z \\ x=2z \\ 130z+10(52-3z)=1664 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=52-3z \\ x=2z \\ 130z+520-30z=1664 \end{cases}$$

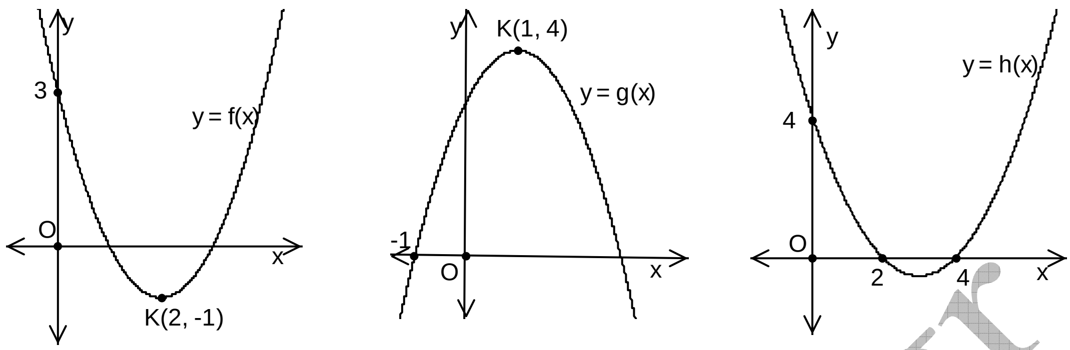
$$\begin{cases} y=52-3z \\ x=2z \\ 100z=1144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=52-3z \\ x=2z \\ z=11,44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=52-3\cdot 11,44 \\ x=22,88 \\ z=11,44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=17,68 \\ x=22,88 \\ z=11,44 \end{cases}$$

12.

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών τριωνύμων , δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τα τριώνυμα αυτά.



Λύση

- $$\begin{cases} f(0)=3 \\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}=2 \\ f(2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=3 \\ \beta=-4\alpha \\ \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+\gamma=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma=3 \\ \beta=-4\alpha \\ 4\alpha-8\alpha+3=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma=3 \\ \beta=-4\alpha \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=3 \\ \beta=-4 \\ \alpha=1 \end{cases}$$ Άρα $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- $$\begin{cases} g(-1)=0 \\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}=1 \\ g(1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(-1)^2+\beta(-1)+\gamma=0 \\ \beta=-2\alpha \\ \alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+\gamma=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \\ \beta=-2\alpha \\ \alpha+\beta+\gamma=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+2\alpha+\gamma=0 \\ \beta=-2\alpha \\ \alpha-2\alpha+\gamma=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma=-3\alpha \\ \beta=-2\alpha \\ -\alpha-3\alpha=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = -3\alpha \\ \beta = -2\alpha \\ \alpha = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 3 \\ \beta = 2 \\ \alpha = -1\end{cases} \quad \text{Άρα} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

- $$\begin{cases}h(0) = 4 \\ h(2) = 0 \\ h(4) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 4 \\ \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma = 0 \\ \alpha \cdot 4^2 + \beta \cdot 4 + \gamma = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = 4 \\ 4\alpha + 2\beta + 4 = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + 4 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = 4 \\ 2\beta = -4\alpha - 4 \\ 4\alpha + \beta + 1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = 4 \\ \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha + \beta + 1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = 4 \\ \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha - 2\alpha - 2 + 1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = 4 \\ \beta = -2\alpha - 2 \\ 2\alpha = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma = 4 \\ \beta = -1 - 2 \\ 2\alpha = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 4 \\ \beta = -3 \\ \alpha = 0,5\end{cases} \quad \text{Άρα} \quad h(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$$